سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

@Flow_KonKour

@LoPRax_KonKour

کلیک کن و با ما همراه شو!

۱

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نامنفی است، همچنین مخرج هیچ کسری نباید صفر شود، از طرفی دامنه تابع $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$ از حل نامعادلات $f(x)>۰$، $g(x)>۰$ و $g(x)\neq ۱$ به دست می‌آید. پس برای محاسبه دامنه تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۳-|x-۲|}}{\log_{|x|}^{۹-x^۲}}$ می‌توان نوشت:

$$۳-|x-۲|\geq ۰\Rightarrow |x-۲|\leq ۳\Rightarrow -۳\leq x-۲\leq ۳\xrightarrow{+۲}-۱\leq x\leq ۵\quad (۱)$$

$$۹-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۹\xrightarrow{\sqrt{\ }}|x|<۳\Rightarrow -۳<x<۳\quad (۲)$$

$$|x|>۰\Rightarrow x\neq ۰\quad (۳)\quad ,\quad |x|\neq ۱\Rightarrow x\neq \pm ۱\quad (۴)$$

$$\log_{|x|}^{۹-x^۲}\neq ۰\Rightarrow ۹-x^۲\neq ۱\Rightarrow x^۲\neq ۸\Rightarrow x\neq \pm ۲\sqrt{۲}\quad (۵)$$

دامنه تابع از اشتراک محدوده‌های به دست آمده به صورت $(-۱,۳)-\{۰,۱,۲\sqrt{۲}\}$ است و در آخر خواسته مسئله برابر است با:

$$(x_۱+x_۲+x_۳)(b-a)=(۰+۱+۲\sqrt{۲})(۳-(-۱))=۴(۱+۲\sqrt{۲})$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲

$$f=\{(۱,-۲),(-۱,\frac{a}{۲}),(۰,۲a),(-۲,-۵)\}\Rightarrow D_f=\{۱,-۱,۰,-۲\}$$

$$g(x)=x^۳+۲x-۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{۱,-۱,۰,-۲\}$$

$$f+g=\{(-۲,-۱۸),(-۱,\frac{a}{۲}-۴),(۰,۲a-۱),(۱,۰)\}$$

چون $f+g$ صعودی است، پس باید داشته باشیم:

$$f(-۲)\leq f(-۱)\leq f(۰)\leq f(۱)$$

$$\Rightarrow -۱۸\leq \frac{a}{۲}-۴\leq ۲a-۱\leq ۰\Rightarrow \begin{cases}\frac{a}{۲}-۴\geq -۱۸\\ \frac{a}{۲}-۴\leq ۲a-۱\\ ۲a-۱\leq ۰\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a\geq -۲۸\\ a\geq -۲\\ a\leq \frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\cap}-۲\leq a\leq \frac{۱}{۲}$$

مقادیر صحیحی که a می‌تواند اختیار کند، ۲- و ۱- و صفر است که حاصل جمع آنها برابر ۳- است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳ الف:

$$g(x)=۹x^۲+۴ \qquad (fog)(x)=\frac{|x|+۱}{۳x^۲-۱}$$

$$f(g(x))=\frac{|x|+۱}{۳x^۲-۱}\Rightarrow f\left(۹x^۲+۴\right)=\frac{|x|+۱}{۳x^۲-۱}\ (۱) \qquad ۹x^۲+۴=t\Rightarrow x^۲=\frac{t-۴}{۹}\Rightarrow |x|=\frac{\sqrt{t-۴}}{۳}$$

جایگذاری در رابطه (۱) ⟶

$$f(t)=\frac{\frac{\sqrt{t-۴}}{۳}+۱}{۳(\frac{t-۴}{۹})-۱}=\frac{\frac{\sqrt{t-۴}+۳}{۳}}{\frac{t-۷}{۳}}=\frac{\sqrt{t-۴}+۳}{t-۷}\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x-۴}+۳}{x-۷}\Rightarrow D_f=[۴,+\infty)-\{۷\}$$

پس گزاره (الف) صحیح است، زیرا دامنهٔ تابع f شامل اعداد طبیعی ۱,۲,۳,۷ نیست.

ب:

$$f(۱۱)+۲f(۲x+۳)=۳x^۲-۴x+۴$$
$$۲x+۳=۱۱\Rightarrow x=۴$$

مقدار $x=۴$ را در رابطهٔ داده شده جایگذاری می‌کنیم:

$$f(۱۱)+۲f(۱۱)=۳(۴)^۲-۴(۴)+۴\Rightarrow ۳f(۱۱)=۳۶\Rightarrow f(۱۱)=۱۲$$

$$\Rightarrow ۱۲+۲f(۲x+۳)=۳x^۲-۴x+۴\Rightarrow f(۲x+۳)=\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۴x-۸)$$

فرض: $۲x+۳=۲\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$

پس $x=-\frac{۱}{۲}$ را در رابطهٔ داده شده جایگذاری می‌کنیم:

$$f(۲)=\frac{۱}{۲}\left(۳(\frac{۱}{۴})-۴(-\frac{۱}{۲})-۸\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۴}+۲-۸\right)=-\frac{۲۱}{۸}$$

بنابراین، گزاره (ب) نیز صحیح است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴ f تابعی وارون‌پذیر است و داریم:

$$f(x)=x+۴\sqrt{x-۲}-۲+۴-۲$$
$$f(x)=x-۲+۴\sqrt{x-۲}+۴-۲$$
$$f(x)=(\sqrt{x-۲}+۲)^۲-۲$$

کافی است x را برحسب y پیدا کنیم و نهایتاً جای x و y را عوض کنیم:

$$y=(\sqrt{x-۲}+۲)^۲-۲\Rightarrow \sqrt{y+۲}-۲=\sqrt{x-۲}$$
$$g(x)=(\sqrt{x+۲}-۲)^۲+۲\Rightarrow\ g(۲)=۲\Rightarrow gog(۲)=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵ تابع هموگرافیک، اگر وارون خودش را قطع کند، حتماً روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کند.

$$\frac{mx+۶}{x+m+۳}=x\Rightarrow x^۲+(m+۳)x=mx+۶\Rightarrow x^۲+۳x-۶=۰$$

جالب آن است که نقطه تلاقی تابع و وارون آن به عدد m ربطی ندارد.

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-۳}{-۶}=\frac{۱}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶ ابتدا داریم:

$$(۱+x)og(x)o(۲-x)=f(x)o(۳+۲x)$$

طرفین را وارون می‌کنیم و داریم:

$$(۲-x)^{-۱}og^{-۱}(x)o(۱+x)^{-۱}=(۳+۲x)^{-۱}of^{-۱}(x)$$

$$(۲-x)og^{-۱}(x)o(x-۱)=\frac{x-۳}{۲}of^{-۱}(x)$$

$$\Rightarrow ۲-g^{-۱}(x-۱)=\frac{f^{-۱}(x)-۳}{۲}\Rightarrow ۷-۲g^{-۱}(x-۱)=f^{-۱}(x)$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)+۲g^{-۱}(x-۱)=۷$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷

$$f(x)=x+[x]\Rightarrow y=x+[x]$$

$$\Rightarrow [y]=[x+[x]]=۲[x]\Rightarrow [y]=۲(y-x)\Rightarrow \frac{۱}{۲}[y]=y-x$$

$$x=y-\frac{۱}{۲}[y]\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-\frac{۱}{۲}[x]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=\frac{-۱}{۲} \\ n=۱ \end{cases}\Rightarrow \frac{m}{n}=-\frac{۱}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸ با توجه به اینکه در تابع $f(-۲x+a)$ ضریب x منفی است، نمودار f یک بار نسبت به محور yها قرینه شده است. بنابراین تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}f(-۲x+a)+b$، هنگامی اکیداً صعودی است که تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است، یعنی بازهٔ $[-۲,-۱]$ متناظر بازهٔ $[۳,۵]$ می‌باشد.

$$y=f(x)\xrightarrow{x\to x+a}y=f(x+a)\xrightarrow{x\to -۲x}y=f(-۲x+a)$$

$$[۳,۵]\Rightarrow [۳-a,۵-a]\Rightarrow \left[\frac{a-۵}{۲},\frac{a-۳}{۲}\right]=[-۲,-۱]\Rightarrow a=۱$$

از طرفی: $g^{-۱}(۱)=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow g(-\frac{۳}{۲})=۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}f(۳+a)+b=۱\xrightarrow{a=۱}b=۱-\frac{۱}{۲}f(۴)\xrightarrow{f(۴)=۰}b=۱$

$$\Rightarrow a+b=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

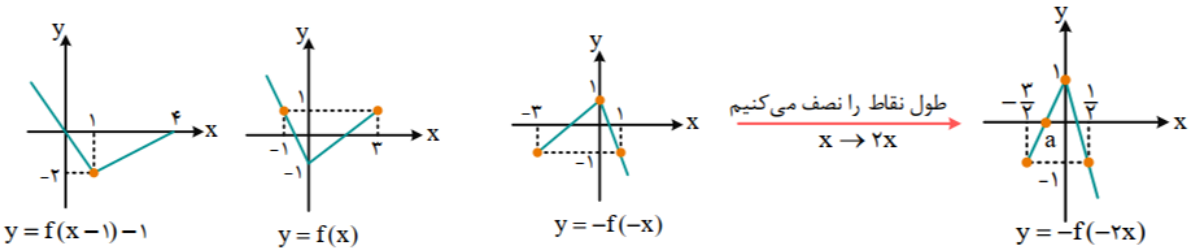
۹

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{۱}{۱+x}+\frac{۳}{۱+x^{۳}}+\frac{۵}{۱+x^{۵}}+\frac{۷}{۱+x^{۷}}+\frac{۹}{۱+x^{۹}} \\ f(\tfrac{۱}{x})&=\frac{x}{x+۱}+\frac{۳x^{۳}}{x^{۳}+۱}+\frac{۵x^{۵}}{x^{۵}+۱}+\frac{۷x^{۷}}{x^{۷}+۱}+\frac{۹x^{۹}}{x^{۹}+۱} \end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)+f(\tfrac{۱}{x})=۲۵$$

$$f(\sqrt{۲}+۱)+f(\sqrt{۲}-۱)=۲۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰ با یک واحد انتقال به بالا و چپ، نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده، سپس با قرینه کردن نسبت به مبدأ مختصات، $y=-f(-x)$ را رسم می‌کنیم.
در نهایت طول نقاط را نصف می‌کنیم تا به تابع $y=-f(-۲x)$ برسیم:



اگر نمودار $\frac{k}{۲}$ واحد به سمت راست انتقال یابد، به نمودار $y=-f(-۲x+k)$ خواهیم رسید.

معادلهٔ خطی که $(a,۰)$ بر آن واقع است به صورت $y=\frac{۴}{۳}x+۱$ می‌باشد:

$$\frac{۴}{۳}a+۱=۰\Rightarrow a=-\frac{۳}{۴}$$

کافیست $\frac{۳}{۴}\le\frac{k}{۲}<\frac{۳}{۲}$ باشد تا نمودار از ناحیهٔ دوم عبور نکرده ولی از ناحیهٔ سوم بگذرد. بنابراین:

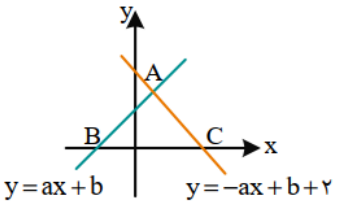
$$\frac{۳}{۲}\le k<۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱ فرض کنید $f(x)=ax+b$، در این صورت:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}}y=f(-x)\xrightarrow{\text{دو واحد به سمت بالا}}y=f(-x)+۲=-ax+b+۲$$

بنابراین مطابق شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۴}{a}$ داده شده است. از طرف دیگر:



$$y_B=۰\Rightarrow ax_B+b=۰\Rightarrow x_B=-\frac{b}{a}$$

$$y_C=۰\Rightarrow -ax_C+b+۲=۰\Rightarrow x_C=\frac{b+۲}{a}$$

$$ax_A+b=-ax_A+b+۲\Rightarrow ۲ax_A=۲\Rightarrow x_A=\frac{۱}{a}\Rightarrow y_A=a(\frac{۱}{a})+b\Rightarrow y_A=b+۱$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}y_A(x_C-x_B)=\frac{۱}{۲}(b+۱)(\frac{b+۲}{a}+\frac{b}{a})=\frac{۱}{۲}(b+۱)(\frac{۲b+۲}{a})=\frac{(b+۱)^۲}{a}$$

در نتیجه:

$$\frac{(b+۱)^۲}{a}=\frac{۴}{a}\Rightarrow(b+۱)^۲=۴\Rightarrow b+۱=۲\Rightarrow b=۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲ ابتدا ضابطهٔ $y=f(۲x-۱)$ را به دست می‌آوریم. صفرهای این تابع برابر ۰ و ۳ می‌باشند.

$$y=ax(x-۳)$$

طول رأس سهمی میانگین صفرها بوده و عرض آن ۲-است: $S(\frac{۳}{۲},-۲)$

$$y(\frac{۳}{۲})=-۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a(-\frac{۳}{۲})=-۲ \Rightarrow a=\frac{۸}{۹}$$

بنابراین:

$$f(۲x-۱)=\frac{۸}{۹}x(x-۳)$$

تبدیلات را بر روی $f(x)$ اعمال می‌کنیم:

$$y=f(x) \xrightarrow[\text{یک واحد به سمت راست}]{x\to x-۱} y=f(x-۱) \xrightarrow[\text{طول نقاط دو برابر}]{x\to \frac{x}{۲}} y=f(\frac{x}{۲}-۱) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور xها}]{\times(-۱)} g(x)=-f(\frac{x}{۲}-۱)$$

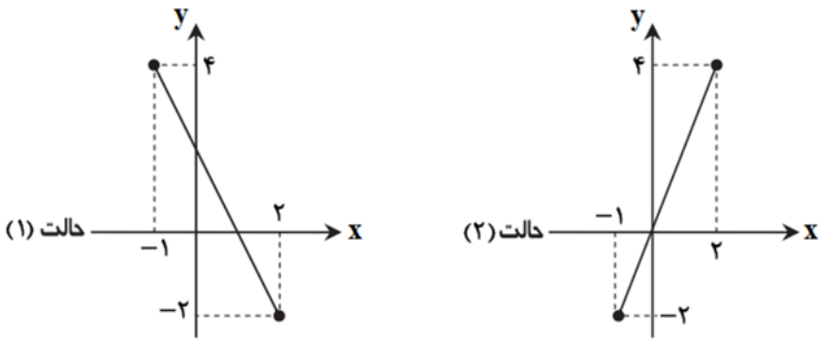
در نتیجه: $g(۱)=-f(-\frac{۱}{۲})$

کافیست در تابع $y=f(۲x-۱)$ به جای x عدد $\frac{۱}{۴}$ را قرار دهیم:

$$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{۹}(\frac{۱}{۴}-۳)=-\frac{۱۱}{۱۸} \Rightarrow g(۱)=\frac{۱۱}{۱۸}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳ **تابع خطی f با دامنهٔ $[-۱,۲]$ و برد $[-۲,۴]$ به یکی از دو صورت زیر می‌تواند باشد:**



پس در هر حالت با مشخص کردن نقاطی که خط از آن می‌گذرد، ضابطهٔ آن را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{حالت (۱)}: (-۱,۴),(۲,-۲)\in f \Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲x+۲$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$f(-۱)=۴\ ,\ f(۰)=۲\ ,\ f(\frac{۱}{۲})=۱\ ,\ f(۱)=۰$$

$$\text{حالت (۲)}: (-۱,-۲),(۲,۴)\in f \Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=۲ \Rightarrow f(x)=۲x$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$f(-۱)=-۲\ ,\ f(۰)=۰\ ,\ f(\frac{۱}{۲})=۱\ ,\ f(۱)=۲$$

از مقایسهٔ مقادیر حاصل شده در هر ۲ حالت، نتیجه می‌شود که $f(\frac{۱}{۲})=۱$ است. در سایر گزینه‌ها، نقطهٔ داده‌شده فقط در یکی از خط‌ها صدق می‌کند و در خط دیگر صدق نمی‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴ نکته: برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع $y=f(x)$، ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم، سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم.

ضابطهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=ax+b$ است. ابتدا از تساوی داده‌شده نتیجه می‌شود:

$$(f^{۲}(۱)+۲f(۱)+۱)+(f^{۲}(۲)-۴f(۲)+۴)=۰ \Rightarrow (f(۱)+۱)^{۲}+(f(۲)-۲)^{۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases}(f(۱)+۱)^{۲}=۰ \Rightarrow f(۱)=-۱\\(f(۲)-۲)^{۲}=۰ \Rightarrow f(۲)=۲\end{cases}$$

اکنون از تساوی بالا نتیجه می‌شود که تابع خطی f از نقاط $(۱,-۱)$ و $(۲,۲)$ می‌گذرد، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=۳x-۴$ است. برای محاسبهٔ وارون این تابع داریم:

$$y=۳x-۴ \Rightarrow ۳x=y+۴ \Rightarrow x=\frac{y+۴}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(۴)=\frac{۸}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۵ نکته: دامنهٔ یک تابع گویا عبارت است از: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

طبق فرض دامنه به‌صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ است، پس $x=۲$ تنها ریشهٔ مخرج است. دو حالت امکان‌پذیر است.

الف) معادلهٔ $x^{۲}-۲mx+۴=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$\Delta<۰ \Rightarrow (-۲m)^{۲}-۴(۴)<۰ \Rightarrow ۴m^{۲}<۱۶ \Rightarrow m^{۲}<۴ \Rightarrow -۲<m<۲$$

ب) معادلهٔ $x^{۲}-۲mx+۴=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=۲$ است.

$$x^{۲}-۲mx+۴=(x-۲)^{۲}=x^{۲}-۴x+۴ \Rightarrow ۲m=۴ \Rightarrow m=۲$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه برای مقادیر m به‌صورت $[۲,-۲)$ است، پس:

$$a=-۲ \quad , \quad b=۲ \Rightarrow b-a=۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶ نکته: حاصل‌ضرب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x) \quad ; \quad D_{f\times g}=D_f\cap D_g$$

ابتدا داریم:

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}}=|x|$$

چون دامنهٔ f برابر $\mathbb{R}$ است، از $D_{f\times g}=\{-\sqrt{۲},-۳,۳\}$ نتیجه می‌شود:

$$D_g=\{-\sqrt{۲},-۳,۳\}$$

اکنون با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$f\times g=\{(-\sqrt{۲},f(-\sqrt{۲})\times g(-\sqrt{۲})),(-۳,f(-۳)\times g(-۳)),(۳,f(۳)\times g(۳))\}=\{(-\sqrt{۲},\sqrt{۲}g(-\sqrt{۲})),(-۳,۳g(-۳)),(۳,۳g(۳))\}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \{(-\sqrt{۲},۲\sqrt{۲}),(-۳,-۱),(۳,۳\sqrt{۲})\} \Rightarrow \begin{cases}g(-\sqrt{۲})=۲\\g(-۳)=-\frac{۱}{۳}\\g(۳)=\sqrt{۲}\end{cases} \Rightarrow R_g=\{۲,-\frac{۱}{۳},\sqrt{۲}\}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷ نکته: اگر تابع f به‌صورت زوج مرتب داده شده باشد، آنگاه با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب، وارون آن، یعنی f^{-1} به دست می‌آید.

نکته: تابع $f+g$ تابعی با دامنهٔ $D_f \cap D_g$ و ضابطهٔ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ است.

نکته: تابع $\frac{f}{g}$، تابعی با دامنهٔ $D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=۰\}$ و ضابطهٔ $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ است.

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$f=\{(-۱,-۱),(۱,۲),(۲,۱),(۵,۳)\} \Rightarrow f^{-1}$$
$$=\{(-۱,-۱)(۲,۱),(۱,۲),(۳,۵)\}$$

منظور از $۱+f^{-1}$، مجموع f^{-1} با تابع ثابت $g(x)=۱$ است. پس:

$$۱+f^{-1}=\{(-۱,-۱+۱),(۲,۱+۱),(۱,۲+۱),(۳,۵+۱)\}$$
$$=\{(-۱,۰),(۲,۲),(۱,۳),(۳,۶)\}$$

بنابراین:

$$D_{\frac{f}{۱+f^{-1}}}=D_f \cap D_{۱+f^{-1}} - \{x \mid (۱+f^{-1})(x)=۰\}$$
$$=\{-۱,۱,۲,۵\}\cap\{-۱,۲,۱,۳\}-\{-۱\}=\{۱,۲\}$$

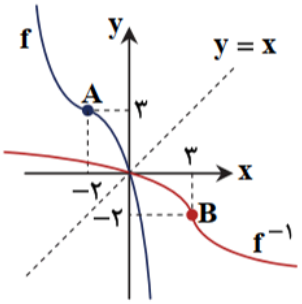
پس:

$$\frac{f}{۱+f^{-1}}=\{(۱,\frac{f(۱)}{۱+f^{-1}(۱)}),(۲,\frac{f(۲)}{۱+f^{-1}(۲)})\}=\{(۱,\frac{۲}{۳}),(۲,\frac{۱}{۲})\}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸ نکته: برای رسم نمودار وارون یک تابع، نمودار آن را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) قرینه می‌کنیم.

ابتدا نمودار $f^{-1}(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس نامعادلهٔ $x(۳f^{-1}(x)+۶)\geq ۰$ راحل می‌کنیم.



برای حل نامعادلهٔ $x(۳f^{-1}(x)+۶)\geq ۰$ دو حالت را در نظر می‌گیریم و بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم:

$$\text{I)}\ \left\{\begin{array}{l} x\geq ۰ \\ ۳f^{-1}(x)+۶\geq ۰ \Rightarrow f^{-1}(x)\geq -۲ \xrightarrow{f^{-1}\text{ باتوجه به نمودار}} x\leq ۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x\in[۰,۳]$$
$$\text{II)}\ \left\{\begin{array}{l} x<۰ \\ ۳f^{-1}(x)+۶<۰ \Rightarrow f^{-1}(x)<-۲ \Rightarrow x>۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$
$$\xrightarrow{\cup} [۰,۳]$$

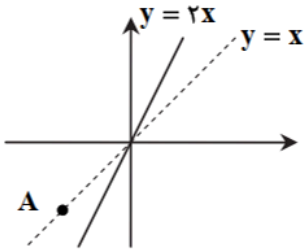
پس مجموعهٔ جواب نامعادله بازهٔ $[۰,۳]$ و مقدار $\frac{۴a+۲b}{۳}$ برابر ۲ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹ نکتهٔ ۱: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنهٔ تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y=x$ است که با معادلهٔ $f(x)=x$ هم نمایش داده می‌شود.

نکتهٔ ۲: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادلهٔ $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم.

اگر تابعی هم ثابت و هم همانی باشد، تابعی تک‌نقطه‌ای به‌صورت $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha\end{vmatrix}$ است و چون این نقطه بالای خط $y=2x$ قرار دارد، در ناحیهٔ سوم واقع است.



همچنین نقطهٔ A روی منحنی $y=\frac{2x^2-3}{x-1}$ واقع است؛ یعنی: $\alpha=\frac{2\alpha^2-3}{\alpha-1}$

$$2\alpha^2-3=\alpha^2-\alpha \Rightarrow \alpha^2+\alpha-3=0 \quad (*) \xrightarrow{\alpha<0} \begin{cases}\alpha=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} & \times\\ \alpha=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} & \checkmark\end{cases}$$

حالا مختصات $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha\end{vmatrix}$ را در سهمی $y=x^2+4x+b$ صدق می‌دهیم:

$$\alpha=\alpha^2+4\alpha+b \Rightarrow -b=\alpha^2+3\alpha=\underbrace{\alpha^2+\alpha}_{=3\ (*)}+2\alpha=3+2\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$-b=3-1-\sqrt{13} \Rightarrow b=\sqrt{13}-2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰ نکته: $(fog)(x)=f(g(x))$

اگر صفرهای چندجمله‌ای $y=f(x)$ را $x_1,x_2,\cdots,x_5$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6$$

چون $y=2f(1-3x)$ را در نظر گرفته‌ایم، طبق تعریف تابع مرکب داریم:

$$y=0 \Rightarrow f(1-3x)=0 \Rightarrow 1-3x=x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$$

در این صورت صفرهای تابع عبارت‌اند از:

$$\Rightarrow x=\frac{1-x_1}{3},\frac{1-x_2}{3},\cdots,\frac{1-x_5}{3}$$

$$\Rightarrow \text{جمع صفرها}=\frac{1-x_1}{3}+\frac{1-x_2}{3}+\cdots+\frac{1-x_5}{3}=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}(x_1+\cdots+x_5)=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\times 6=\frac{5}{3}-2=-\frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۱ نکته (دامنهٔ تابع مرکب): دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

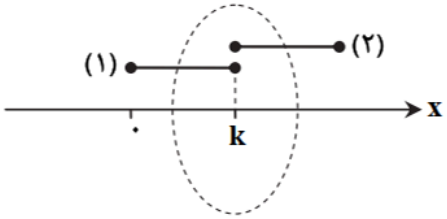
۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

$$f(x)=4x-3k^2\ ,\ D_f=[0,k]$$

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{\underbrace{0\le x\le k}_{(1)} \mid 0\le 4x-3k^2\le k\}$$

$$0\le 4x-3k^2\le k \xrightarrow{+3k^2} 3k^2\le 4x\le 3k^2+k \xrightarrow{\div 4} \frac{3k^2}{4}\le x\le \frac{3k^2+k}{4} \quad (2)$$

باید اشتراک مجموعهٔ (۱) و (۲) فقط یک نقطه باشد. با توجه به اینکه $k>0$ است،



عبارت‌های $\frac{3k^2}{4}$ و $\frac{3k^2+k}{4}$ مثبت هستند، پس فقط حالت زیر ممکن است:

$$\Rightarrow \frac{3k^2}{4}=k \xrightarrow{k>0} \frac{3k}{4}=1 \Rightarrow k=\frac{4}{3}$$

اکنون داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=4x-\frac{16}{3}\ ,\ D_f=\left[0,\frac{4}{3}\right] \\ g(x)=(fof)(x)\ ,\ D_g=\left\{\frac{4}{3}\right\}\end{array}\right\} \Rightarrow g(\tfrac{4}{3})=f(f(\tfrac{4}{3}))=f(0)=-\frac{16}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۲ نکته (دامنهٔ تابع مرکب): دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

ضابطهٔ g و سپس دامنهٔ آن را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\sqrt[4]{\frac{1}{f^4(x)-4x^2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{x^2+1})^4-4x^2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+1-4x^2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-2x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(x^2-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

اکنون داریم:

$$|x^2-1|=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\in\mathbb{R}}_{(1)} \mid \sqrt{x^2+1}\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}\}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}\neq 1 \Rightarrow x\neq 0 \\ \sqrt{x^2+1}\neq -1 \quad \text{همواره برقرار است.}\end{cases} \Rightarrow x\neq 0 \quad (2)$$

$$(1)\cap(2) \Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}-\{0\}$$

پس دامنهٔ gof فقط شامل عدد صفر نیست.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۳ نکته (دامنهٔ تابع مرکب): دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد. ۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

نکته: به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم.

توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند.

شیب خط را به‌ازای مقادیر $x \geq ۲$ و $x < ۲$ می‌یابیم.

$$\begin{cases} x \geq ۲ \Rightarrow y = ۲x + b(x-۲) - ۱ = \underbrace{(۲+b)}_{m_۱}x + (-۲b-۱) \\ x < ۲ \Rightarrow y = ۲x - b(x-۲) - ۱ = \underbrace{(۲-b)}_{m_۲}x + (۲b-۱) \end{cases}$$

چون تابع یکنوا است، باید $m_۱m_۲ \geq ۰$ باشد:

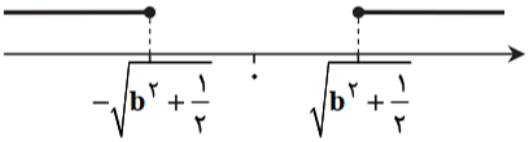
$$(۲+b)(۲-b) \geq ۰ \Rightarrow ۴-b^۲ \geq ۰ \Rightarrow b^۲ \leq ۴$$

$$D_f : x \geq \frac{۱}{۲} \ , \ D_g : \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ - b^۲ \geq \frac{۱}{۲}\right\}$$

$$x^۲ \geq b^۲ + \frac{۱}{۲} \xrightarrow[\text{اشتراک}]{b^۲ \leq ۴} x^۲ \geq \frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \\ x \leq -\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow D_{fog} = \mathbb{R} - (-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})$$

دقت کنید که مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x^۲ \geq b^۲ + \frac{۱}{۲}$ روی محور به‌صورت زیر است:



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴

نکته: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

نکته: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

ابتدا معادلهٔ خط‌های y_1 و y_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (3,1) \in y_1 \\ (0,-2) \in y_1 \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{1+2}{3-0} = 1 \xrightarrow{(0,-2)\in y_1} y_1 = x - 2$$

$$y_2 \perp y_1 \Rightarrow m_2 = -1 \ , \ (0,1) \in y_2 \Rightarrow y_2 = -x + 1$$

اکنون داریم:

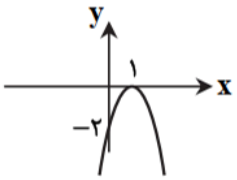
$$y_1 = f(x) - x \Rightarrow x - 2 = f(x) - x \Rightarrow f(x) = 2x - 2$$

$$y_2 = (3g + f)(x) \Rightarrow -x + 1 = 3g(x) + 2x - 2 \Rightarrow 3g(x) = -3x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 1$$

بنابراین:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x-2)(-x+1) = -2(x-1)(x-1) = -2(x-1)^2$$

پس نمودار $(f \cdot g)(x)$ یک سهمی به‌شکل زیر است:



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵

نکته: اگر $k \in \mathbb{Z}$، داریم:

$$[x] = k \Leftrightarrow k \le x < k+1$$

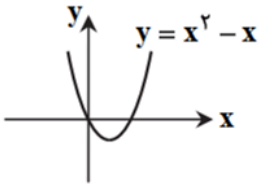
در معادلهٔ $x^2 - x = [x^2 - x] + [\sqrt{x}] - 2$ با توجه به اینکه $[x^2 - x]$ و $[\sqrt{x}]$ اعدادی صحیح هستند، پس سمت راست معادله عددی صحیح است. بنابراین سمت چپ معادله یعنی $x^2 - x$ نیز باید عددی صحیح باشد؛ بنابراین:

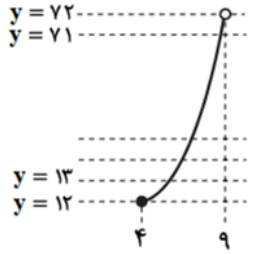
$$x^2 - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x^2 - x] = x^2 - x \qquad (1)$$

اکنون داریم:

$$x^2 - x = x^2 - x + [\sqrt{x}] - 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2 \Rightarrow 2 \le \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 4 \le x < 9 \qquad (2)$$

با توجه به شرایط (۱) و (۲) باید مقادیری از x را در بازهٔ $[4,9)$ به‌دست آوریم که به‌ازای آن‌ها $x^2 - x \in \mathbb{Z}$ باشد.





$$x \in [4,9) \Rightarrow 12 \le x^2 - x < 72 \xrightarrow{y = x^2 - x \in \mathbb{Z}} y = \{12, 13, \cdots, 71\}$$

$$\Rightarrow (71 - 12) + 1 = 60 \Rightarrow \text{معادله ۶۰ جواب دارد.}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: برای رسم نمودار $y=-f(x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(-x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کرده‌ایم، پس ابتدا ضابطهٔ وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$y=۲-\sqrt{۴-x} \Rightarrow \sqrt{۴-x}=۲-y \xrightarrow[y\le ۲]{۲-y\ge ۰} (\sqrt{۴-x})^{۲}=(۲-y)^{۲}$$

$$\Rightarrow ۴-x=(۲-y)^{۲} \Rightarrow x=۴-(۲-y)^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۴-(۲-x)^{۲} \ , \ x\le ۲ \quad (*)$$

تابع $f^{-1}(x)$ نسبت به مبدأ مختصات، یعنی نسبت به محور طول‌ها و محور عرض‌ها قرینه شده است، پس ضابطهٔ $y=-f^{-1}(-x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}(x)=۴-(۲-x)^{۲} \ ; \ x\le ۲ \xrightarrow[\text{مبدأ مختصات}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-(۴-(۲-(-x))^{۲}) \ ; \ -x\le ۲$$

$$\Rightarrow y=-(۴-(۲+x)^{۲}) \Rightarrow y=(x+۲)^{۲}-۴ \ , \ x\ge -۲$$

اکنون معادلهٔ $y=۵$ را حل می‌کنیم تا طول محل برخورد به‌دست آید:

$$(x+۲)^{۲}-۴=۵ \Rightarrow (x+۲)^{۲}=۹ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۳ \Rightarrow x=۱ \\ x+۲=-۳ \Rightarrow x=-۵ \end{cases} \xrightarrow{x\ge -۲} x=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۷ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: $x=\begin{cases} x & ; \ x\ge ۰ \\ -x & ; \ x<۰ \end{cases}$

چون قرار است شرط داده‌شده برای هر مقدار x برقرار باشد، پس دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x>۰$

$$x>۰ \Rightarrow f(x)=kx-x=(k-۱)x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{k-۱}$$

$$x>۰ \Rightarrow f(-x)=k(-x)-|-x| \xrightarrow{|-x|=|x|} f(-x)=-kx-\underbrace{|x|}_{+}=-kx-x=-(k+۱)x$$

اکنون با توجه به ضابطه‌های به‌دست‌آمده و فرض سؤال داریم:

$$f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}f(-x) \Rightarrow \frac{x}{k-۱}=\frac{۱}{۳}(k+۱)x \xrightarrow{x>۰} \frac{۱}{k-۱}=\frac{k+۱}{۳} \Rightarrow k^{۲}-۱=۳ \Rightarrow k^{۲}=۴ \Rightarrow k=\pm ۲$$

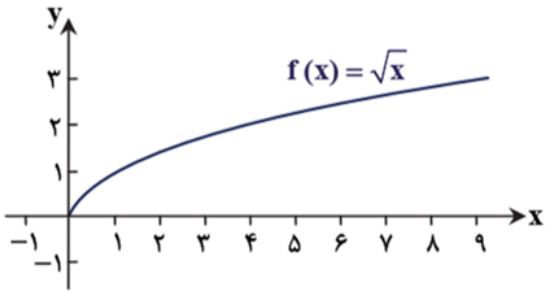
حالت دوم: $x<۰$

این حالت نیز مشابه حالت اول است و به همین جواب‌ها خواهیم رسید.

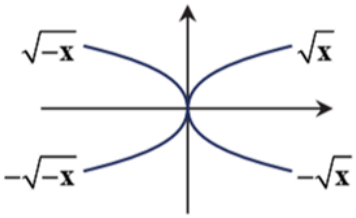
هر دو مقدار به‌دست‌آمده برای k قابل‌قبول هستند و با توجه به گزینه‌ها $k=۲$ را انتخاب می‌کنیم.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۸ نکته: نمودار تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{x}$ به‌صورت روبه‌رو است:



نکته: برای رسم نمودار $y=f(-x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.



نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، داریم:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

با توجه به نمودار داده‌شده نمودار $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور عرض‌ها قرینه شده است. پس $a<0$ است.

از طرفی دامنهٔ تابع بازهٔ $[-\infty,2)$ است، پس $x=2$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است؛ یعنی:

$$ax+b=0 \xrightarrow{x=2} 2a+b=0 \Rightarrow b=-2a \quad (1)$$

با توجه به نمودار $f(1)=0$ است؛ بنابراین:

$$f(1)=\sqrt{a+b}+c=0 \Rightarrow c=-\sqrt{a+b} \xrightarrow{(1)} c=-\sqrt{a-2a} \Rightarrow c=-\sqrt{-a} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} f(x)=\sqrt{ax-2a}-\sqrt{-a} \xrightarrow{x=2} f(2)=-\sqrt{-a} \Rightarrow A(2,-\sqrt{-a})$$

نقطهٔ A نسبت به خط $y=x$ قرینه شده است، پس $A'(-\sqrt{-a},2)$ قرینهٔ A نسبت به خط $y=x$ است و داریم:

$$A'\in f \Rightarrow f(-\sqrt{-a})=2 \Rightarrow \sqrt{-a\sqrt{-a}-2a}-\sqrt{-a}=2 \Rightarrow \sqrt{-a\sqrt{-a}-2a}=\sqrt{-a}+2 \quad (*)$$

با تغییر متغیر $\sqrt{-a}=t$ و $t>0$ داریم:

$$\sqrt{-a}=t \Rightarrow -a=t^2$$

$$\xrightarrow{(*)} \sqrt{t^3+2t^2}=t+2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^3+2t^2=(t+2)^2 \Rightarrow t^2(t+2)=(t+2)^2 \xrightarrow[t+2>2]{t>0} t^2=t+2$$

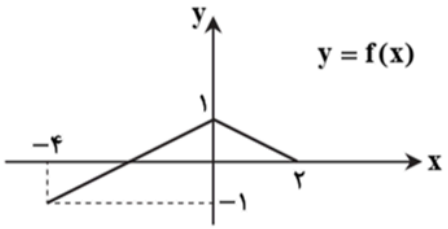
$$\Rightarrow t^2-t-2=0 \xrightarrow{t>0} \begin{cases} t=-1 & \times \\ t=2 & \checkmark \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-a}=2 \Rightarrow -a=4 \Rightarrow a=-4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم.

ابتدا طول نقاط نمودار تابع $g(x)$ را دو برابر و از عرض آن‌ها یک واحد کم می‌کنیم تا به نمودار $f(x)$ برسیم. زیرا:

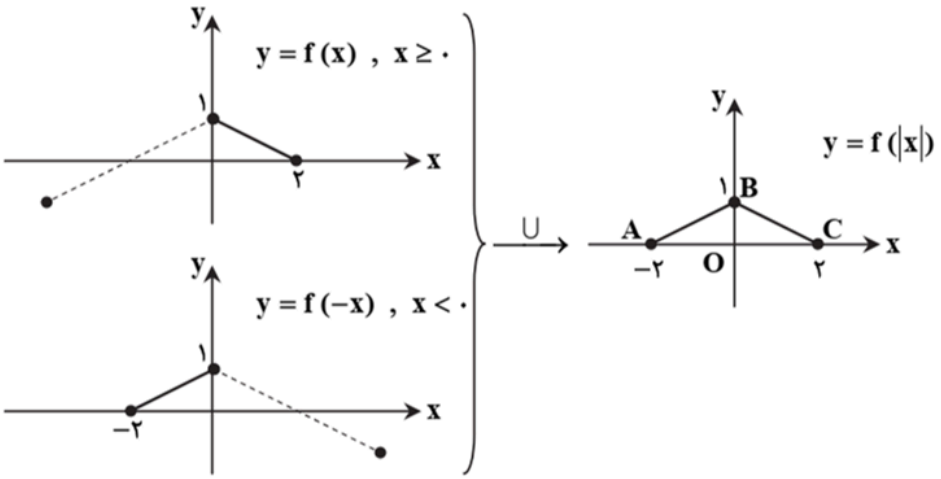


$$g(x)=f(۲x)+۱ \xrightarrow[\text{تبدیل می‌کنیم.}]{\frac{x}{۲}\text{ را به }x} y=f(x)+۱ \xrightarrow{f(x)-۱} y=f(x)$$

اکنون با تعیین‌علامت x نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم می‌کنیم.

راه‌حل اول:

$\begin{cases} f(x) \;;\; x\geq ۰ \Rightarrow \text{نمودار } f(x) \text{ را رسم می‌کنیم و آن را در بازهٔ } [۰,+\infty) \text{ محدود می‌کنیم.} \\ f(-x) \;;\; x<۰ \Rightarrow \text{نمودار } f(x) \text{ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و آن را در بازهٔ } (-\infty,۰) \text{ محدود می‌کنیم.} \end{cases}$



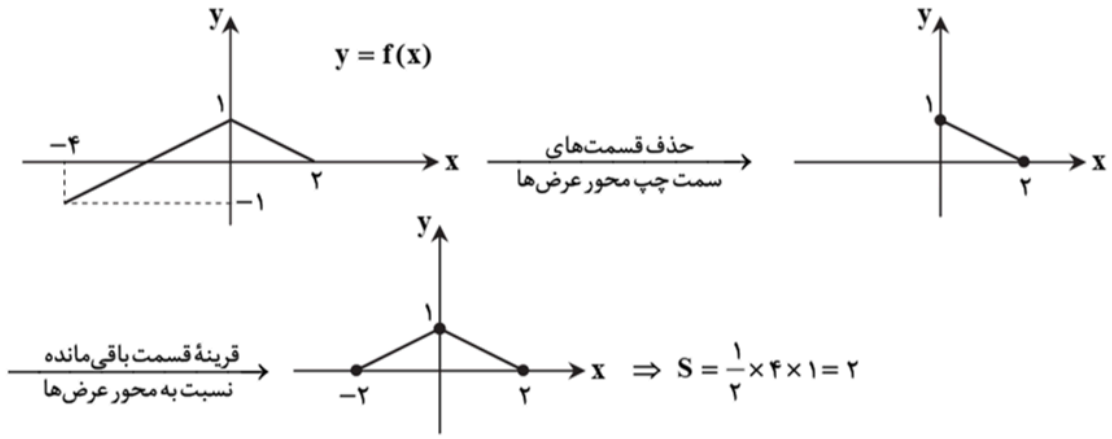
اکنون مساحت محدود به نمودار تابع $f(x)$ را با محور طول‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}|OB\times AC|=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱=۲$$

راه‌حل دوم:

نکته: برای رسم نمودار $y=f(|x|)$ از روی نمودار $f(x)$، کافی است قسمت‌هایی از نمودار که در سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد را حذف کنیم و قسمت‌های باقی‌مانده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

بعد از رسم نمودار تابع $f(x)$، مطابق راه‌حل اول داریم:



$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰ نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = x \;;\; x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \;;\; x \in D_f$$

برای حل معادلهٔ $(fof)^{-1}(x) = (f^{-1}of)(x)$، باید محدوده‌ای از x را پیدا کنیم که $x \in D_f$ و $x \in R_f$ باشد؛ یعنی $x \in D_f \cap R_f$.
پس ابتدا دامنه و برد f را به‌دست می‌آوریم:

$$x+۶b \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۶b \Rightarrow D_f = [-۶b, +\infty)$$

$$\sqrt{x+۶b} \geq ۰ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲\sqrt{x+۶b} \leq ۰ \xrightarrow{+۳a} ۳a - ۲\sqrt{x+۶b} \leq ۳a \Rightarrow R_f = (-\infty, ۳a]$$

اگر $D_f \cap R_f \neq \varnothing$، هر $x \in [-۶b, ۳a]$ جواب معادله است و از آنجایی که $x = ۴b^۲ + ۲a$ تنها جواب معادلـه اسـت، فقـط $D_f \cap R_f$ شامل عضو $۴b^۲ + ۲a$ است؛ بنابراین:

$$-۶b = ۳a \Rightarrow -۲b = a \quad (۱)$$

$$۴b^۲ + ۲a = ۳a \Rightarrow ۴b^۲ - a = ۰ \Rightarrow ۴b^۲ + ۲b = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۱)} a = ۱ \\ b = ۰ \;\; ✗ \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$f(x) = ۳ - ۲\sqrt{x-۳} \Rightarrow f(۵a+۲b) = f(۴) = ۳ - ۲\sqrt{۴-۳} = ۱ = a$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۱ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = x \;;\; x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \;;\; x \in D_f$$

$$y = 2f(3x) - 1 \Rightarrow y + 1 = 2f(3x) \Rightarrow f(3x) = \frac{y+1}{2}$$

اکنون با توجه به رابطهٔ $f^{-1}(f(x)) = x$، f^{-1} دو طرف را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(f(3x)) = f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 3x = f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

با عوض کردن جای x و y داریم:

$$y = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) = a f^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right) + d$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} \;,\; b = 1 \;,\; c = 2 \;,\; d = 0 \Rightarrow \frac{ac+d}{2b} = \frac{\frac{2}{3}+0}{2} = \frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲ نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

نکته: $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ یا $x \geq a$

تابع $f(x) = 3x + |x-1|$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؛ زیرا:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow f(x) = 3x + x - 1 = 4x - 1 \\ x < 1 \Rightarrow f(x) = 3x - x + 1 = 2x + 1 \end{cases}$$

بنابراین در مورد تابع اکیداً صعودی f داریم:

$$f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$$

اکنون دامنهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_g : (fof)(x) - f(3x+5) \geq 0 \Rightarrow f(f(x)) \geq f(3x+5) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(x) \geq 3x+5 \Rightarrow 3x + |x-1| \geq 3x+5$$

$$\Rightarrow |x-1| \geq 5 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 5 \Rightarrow x \geq 6 \\ x-1 \leq -5 \Rightarrow x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow D_g = (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$$

پس دامنهٔ تابع g شامل ۹ عدد صحیح $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ نیست.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳

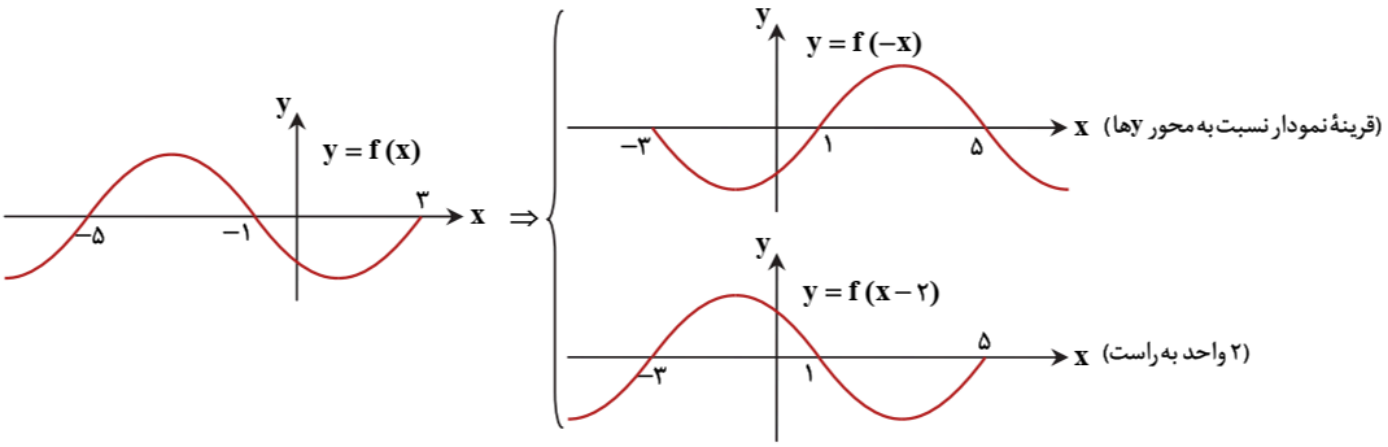
نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>۰$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

ابتدا از روی نمودار $y=f(۲x-۱)$ نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار طول نقاط را دو برابر می‌کنیم و سپس یک واحد از آن‌ها کم می‌کنیم؛ زیرا:

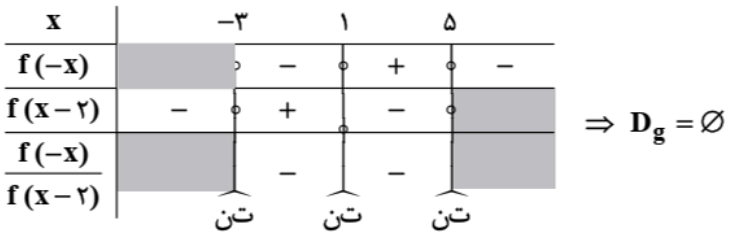
$$y=f(۲x-۱) \xrightarrow{x\to\frac{x}{۲}} y=f(x-۱) \xrightarrow{x\to x+۱} y=f(x)$$

اکنون از روی نمودار f، نمودار $f(-x)$ و $f(x-۲)$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارهای به‌دست آمده، نامعادلهٔ $\frac{f(-x)}{f(x-۲)}\geq ۰$ را حل می‌کنیم تا دامنهٔ تابع g به‌دست آید.

راه‌حل اول:



$\Rightarrow D_g=\varnothing$

بنابراین دامنهٔ تابع g شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

راه‌حل دوم:

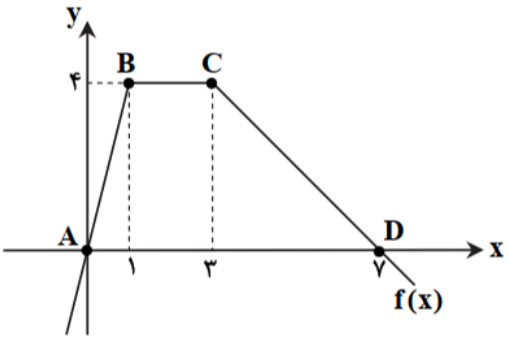
نامعادلهٔ $\frac{f(-x)}{f(x-۲)}\geq ۰$ وقتی برقرار است که یکی از دو حالت زیر اتفاق بیافتد:

حالت اول: $f(-x)\geq ۰\ ,\ f(x-۲)>۰$ حالت دوم: $f(-x)<۰\ ,\ f(x-۲)<۰$

با توجه به نمودارها، مشاهده می‌شود که هیچ‌کدام از دو حالت بالا اتفاق نمی‌افتند.

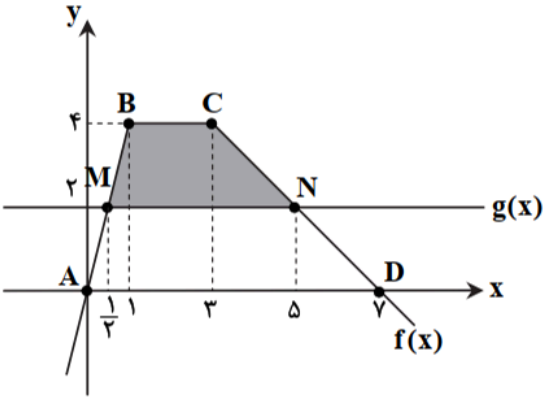
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۴ ابتدا تابع چندضابطه‌ای $f(x)$ را رسم می‌کنیم، می‌دانیم برای رسم هر خط باید ۲ نقطه از آن مشخص باشد، بنابراین:



$$f(x)=\begin{cases}۴x & x<۱ \Rightarrow A(۰,۰),B(۱,۴)\\ ۴ & ۱\le x\le ۳ \Rightarrow \text{تابع ثابت}\\ -x+۷ & x>۳ \Rightarrow C(۳,۴),D(۷,۰)\end{cases}$$

اگر تابع ثابت $g(x)=۲$ را رسم کنیم، مشاهده می‌شود تابع f را در نقاط M و N قطع می‌کند و شکل محدود به دو تابع، ذوزنقهٔ $MBCN$ است، پس باید مختصات نقاط M و N را پیدا کرد. برای این کار باید ضابطهٔ اول و سوم در تابع $f(x)$ را برابر عدد ۲ قرار داد.



$$۴x=۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow M(\frac{۱}{۲},۲)$$

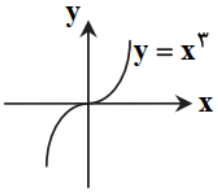
$$-x+۷=۲ \Rightarrow x=۵ \Rightarrow N(۵,۲)$$

پس در ذوزنقهٔ $MBCN$ قاعدهٔ بزرگ $MN=\frac{۹}{۲}$، قاعدهٔ کوچک $BC=۲$ و ارتفاع ۲ واحد است، در نتیجه مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times(۲+\frac{۹}{۲})=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۵ نکته: نمودار $y=x^۳$ به‌صورت روبه‌رو است:



نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

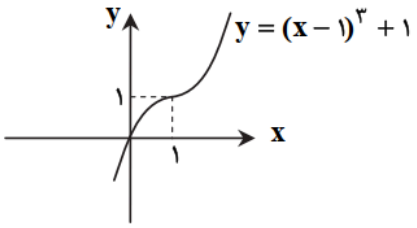
ابتدا ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را با توجه به ضابطهٔ $f(x)$ به‌دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt[۳]{x-۲}+۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{x-۲}=y-۲ \Rightarrow x-۲=(y-۲)^۳ \Rightarrow x=(y-۲)^۳+۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۲)^۳+۲$$

حال $y=f^{-۱}(x+۱)-۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y=f^{-۱}(x+۱)-۱=(x+۱-۲)^۳+۲-۱ \Rightarrow y=(x-۱)^۳+۱$$

برای رسم نمودار $y=(x-۱)^۳+۱$، نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



مطابق شکل فوق، نمودار از نواحی اول و سوم می‌گذرد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۶ نکته (تابع اکیداً صعودی): اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

نکته (دامنهٔ تابع مرکب): دامنهٔ تابع مرکب gof، مجموعهٔ xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

f تابعی اکیداً صعودی است، پس با توجه به تعریف تابع اکیداً صعودی داریم:

$$f(|x|-1) < f(|x|+x) \Rightarrow |x|-1 < |x|+x \Rightarrow x > -1 \quad (1)$$

همچنین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-\infty, 6)$ است، پس مطابق تعریف دامنهٔ تابع مرکب عبارت ورودی f باید در محدودهٔ دامنهٔ f باشد، یعنی:

$$|x|-1 < 6 \Rightarrow |x| < 7 \Rightarrow -7 < x < 7 \quad (2)$$

$$|x|+x < 6 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x+x < 6 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \\ x < 0 \Rightarrow -x+x < 6 \Rightarrow 0 < 6 \Rightarrow x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\cup} x < 3 \quad (3)$$

اشتراک سه محدودهٔ به‌دست‌آمده، برابر با $-1 < x < 3$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۷ نکته: اگر k عددی صحیح باشد و $k \leq x < k+1$، آنگاه $[x] = k$ و برعکس.

با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$\left[\frac{x-4}{6}\right] = -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x-4}{6} < 0 \Rightarrow -6 \leq x-4 < 0 \Rightarrow -2 \leq x < 4$$

بنابراین، طبق محدودهٔ به‌دست‌آمده $x-4 < 0$ و $x+2 \geq 0$، پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ در این محدوده به‌صورت زیر است:

$$f(x) = |x-4| - |x+2| = -(x-4) - (x+2) = -2x+2$$

طول نقاط تقاطع نمودارهای f و g، از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x^2 - 4x - 19 = -2x+2 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12\times 21}}{6} = \frac{2 \pm 16}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \ \checkmark \\ x = -\frac{7}{3} \ \times \end{cases}$$

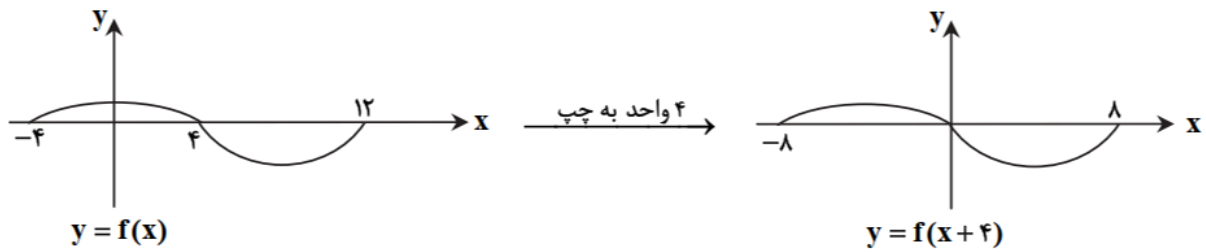
با توجه به محدودهٔ $-2 \leq x < 4$، فقط جواب $x = 3$ قابل‌قبول است. پس نمودارهای دو تابع f و g در یک نقطه مشترک هستند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۸ نکته: برای رسم نمودار $y=f(kx)$ وقتی $k>1$، کافی است نمودار f را در امتداد محور طول‌ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده کنیم (طول نقاط را بر k تقسیم می‌کنیم)

نکته: برای رسم نمودار $y=f(x+a)$ وقتی $a>0$، کافی است نمودار تابع f را a واحد به‌سمت چپ منتقل کنیم.

نمودار داده‌شده، نمودار $y=f(2x)$ است که در اثر $\frac{1}{2}$ برابرشدن طول نقاط نمودار f رسم شده است، پس اگر طول نقاط این نمودار را در راستای افقی دو برابر کنیم، نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. پس از رسم نمودار $y=f(x)$، آن را ۴ واحد در راستای افقی به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=f(x+4)$ حاصل شود.



برای یافتن دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{-5f(x+4)}{x}}$، باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{-5f(x+4)}{x}\geq 0$$

مطابق جدول تعیین‌علامت زیر، دامنهٔ تابع خواسته‌شده برابر با $D=[-8,8]-\{0\}$ است.

x		-8		0		8	
-5	−		−		−		−
$f(x+4)$		○	+	○	−	○	
x	−		−	○	+		+
$\frac{-5f(x+4)}{x}$		○	+		+	○	

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۹ نکته (تابع اکیداً نزولی): اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

نکته : $(gof)(x) = g(f(x))$

راه‌حل اول:

تابع f از انتقال و قرینه کردن تابع $y = x^3$ نسبت به محور طول‌ها به‌دست می‌آید، پس این تابع اکیداً نزولی است، پس برای حل نامعادلهٔ $f(a) < f(b)$، می‌توانیم بنویسیم: $a > b$.

$$(fog)(x) < (foh)(x) \Rightarrow f(g(x)) < f(h(x)) \Rightarrow g(x) > h(x) \Rightarrow \frac{1}{3-x} > x-1$$

$$\Rightarrow x-1-\frac{1}{3-x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-3)+1}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x-3} < 0$$

		2		3	
$(x-2)^2$	+	0	+	|	+
$x-3$	−	|	−	0	+
$\frac{(x-2)^2}{x-3}$	−	0	−	ت ن	+

بنابراین مجموعه‌جواب نامعادله به‌صورت، $(-\infty,2)\cup(2,3)$ یا $(-\infty,3)-\{2\}$ می‌باشد.

راه‌حل دوم:

نکته : $a^3 > b^3 \Rightarrow a > b$

نامعادله را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) < f(h(x)) \Rightarrow 13-(\frac{1}{3-x}+11)^3 < 13-(x-1+11)^3 \Rightarrow -(\frac{1}{3-x}+11)^3 < -(x+10)^3$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{3-x}+11)^3 > (x+10)^3 \Rightarrow \frac{1}{3-x}+11 > x+10$$

ادامهٔ راه‌حل مشابه است.

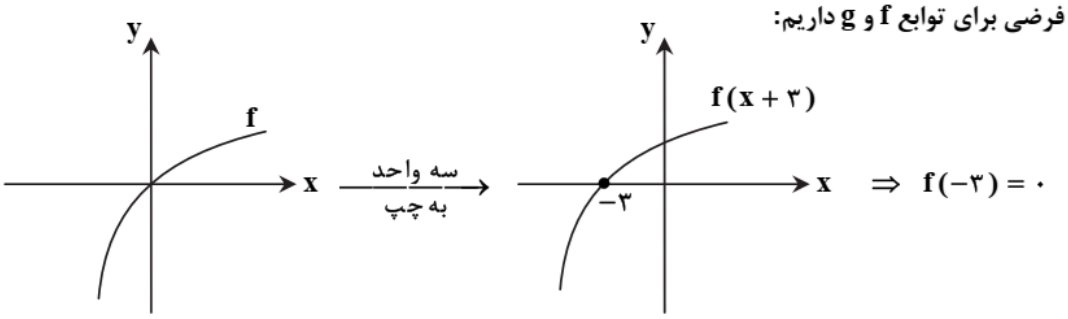
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

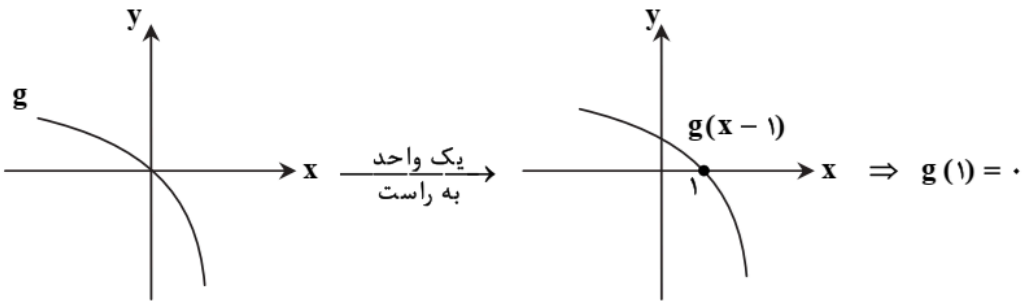
۴۰ نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

می‌دانیم توابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک هستند، پس هر تابع اکیداً یکنوا محور طول‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

با رسم شکل فرضی برای توابع f و g داریم:





اکنون نامعادلهٔ $\frac{x^2-4x}{f(x+3)g(x-1)} \geq 0$ را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		-3		0		1		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$g(x-1)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y		$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
				تن				تن			

$\xrightarrow{y \geq 0}$ $x \in (-3, 0] \cup (1, 4]$

پس در جواب نامعادلهٔ $y \geq 0$، ۶ عدد صحیح $x = -2, -1, 0, 2, 3, 4$ وجود دارند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

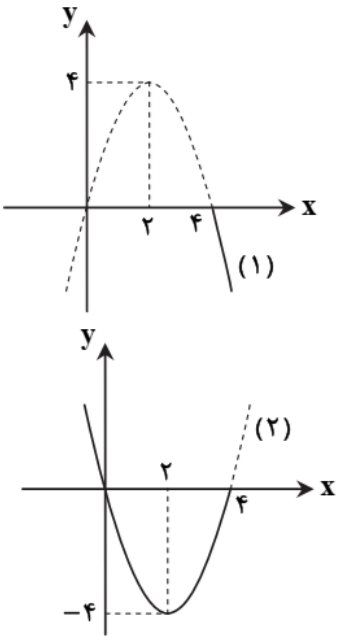
۴۱ نکته: برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

نکته: $D_{f^{-1}} = R_f \, , R_{f^{-1}} = D_f$

نکته: $|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u \leq 0 \end{cases}$

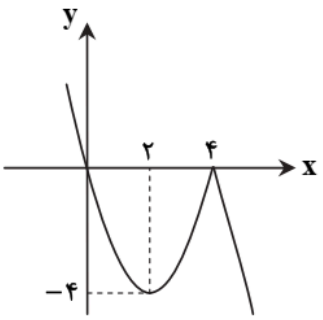
با تعیین علامت عبارت $x-4$، ضابطهٔ تابع f را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq 4 \Rightarrow |x-4| = x-4 \Rightarrow y = -x(x-4) \xrightarrow{\text{نمودار}} \\ x \leq 4 \Rightarrow |x-4| = -(x-4) \Rightarrow y = x(x-4) \xrightarrow{\text{نمودار}} \end{cases}$$



اکنون نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$(۱) \cup (۲) \xrightarrow{\text{نمودار}}$



پس تابع f در بازهٔ $[۲,۴]$ اکیداً صعودی است و برد تابع f برابر با $[-۴,۰]$ است.

اکنون وارون تابع زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} [۲,۴] \Rightarrow [-۴,۰] \\ y = x^۲ - ۴x \end{cases}$$

$$y = x^۲ - ۴x \Rightarrow y + ۴ = x^۲ - ۴x + ۴ \Rightarrow y + ۴ = (x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+۴} = |x-۲| \xrightarrow{۲ \leq x \leq ۴} \sqrt{y+۴} = x-۲$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y+۴} + ۲ \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+۴} + ۲ \; ; \; -۴ \leq x \leq ۰$$

اکنون معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+۴} + ۲ = \sqrt{x^۲ + ۲} + ۲ \Rightarrow \sqrt{x+۴} = \sqrt{x^۲ + ۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + ۴ = x^۲ + ۲ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x-۲) = ۰ \xrightarrow{-۴ \leq x \leq ۰} \begin{cases} x = -۱ \checkmark \\ x = ۲ \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ داده‌شده فقط یک جواب حقیقی دارد.

۴۲ نکته: اگر $a \neq ۱$ و $a,b>۰$، آنگاه: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

با توجه به شکل داده‌شده داریم:

$$g(x)=ba^{-x} \xrightarrow{g(۰)=\frac{۱}{۴}} ba^{۰}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow b=\frac{۱}{۴} \qquad f(x)=ab^{-x} \xrightarrow{f(۰)=۲} ab^{۰}=۲ \Rightarrow a=۲$$

بنابراین:

$$g(x)=\frac{۱}{۴}\times ۲^{-x} \qquad f(x)=۲(\frac{۱}{۴})^{-x}=۲\times ۴^{x}=۲\times ۲^{۲x}$$

اکنون ضابطهٔ $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=۲\times ۲^{۲x} \Rightarrow \frac{۱}{۲}y=۲^{۲x} \Rightarrow \log_۲ \frac{۱}{۲}y=۲x \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۲ \frac{۱}{۲}y=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}\log_۲ \frac{۱}{۲}x$$

$$y=\frac{۱}{۴}\times ۲^{-x} \Rightarrow ۴y=۲^{-x} \Rightarrow \log_۲ ۴y=-x \Rightarrow x=-\log_۲ ۴y \Rightarrow g^{-۱}(x)=-\log_۲ ۴x$$

اکنون معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g^{-۱}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ \frac{۱}{۲}x=-\log_۲ ۴x \xrightarrow{x>۰} \log_۲ \sqrt{\frac{۱}{۲}x}=\log_۲ \frac{۱}{۴x} \Rightarrow \sqrt{\frac{۱}{۲}x}=\frac{۱}{۴x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x}{۲}=\frac{۱}{۱۶x^{۲}} \Rightarrow ۸x^{۳}=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر نمودار دو تابع وارون‌پذیر f و g در نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ متقاطع باشند، نمودار توابع $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ در نقطهٔ $A'(\beta,\alpha)$ متقاطع هستند.

بعد از محاسبهٔ f و g داریم:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow ۲\times ۲^{۲x}=\frac{۱}{۴}\times ۲^{-x} \Rightarrow ۸\times ۲^{۲x}=۲^{-x} \Rightarrow \frac{۲^{۲x}}{۲^{-x}}=\frac{۱}{۸} \Rightarrow ۲^{(۲x+x)}=۲^{-۳} \Rightarrow x=-۱$$

$$f(-۱)=g(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

پس f و g در نقطهٔ $A(-۱,\frac{۱}{۲})$ متقاطع هستند و در نتیجه تابع $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ در نقطهٔ $A'(\frac{۱}{۲},-۱)$ با هم برخورد می‌کنند و طول محل برخورد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۳ نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع f که $x_۱<x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱)>f(x_۲)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

تابع داده‌شده در گزینهٔ ۳ اکیداً نزولی است؛ زیرا با توجه به اینکه دامنهٔ این تابع $[-\infty,۰)$ است، داریم:

$$\begin{cases} x_۱<x_۲<۰ \Rightarrow x_۲^{۲}<x_۱^{۲} \\ x_۱<x_۲ \Rightarrow -x_۲<-x_۱ \Rightarrow \sqrt{-x_۲}<\sqrt{-x_۱} \end{cases} \Rightarrow x_۲^{۲}+\sqrt{-x_۲}<x_۱^{۲}+\sqrt{-x_۱} \Rightarrow f(x_۲)<f(x_۱)$$

برای سایر گزینه‌ها مثال نقض ارائه می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $۱>۰$; $f(۱)>f(۰)$

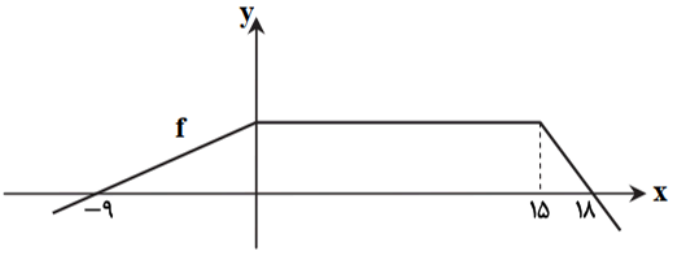
گزینهٔ ۲: $۱>۰$; $f(۱)=f(۰)$

گزینهٔ ۴: $۰>-۱$; $f(-۱)=f(۰)$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۴ نکته: اگر $k > ۱$، نمودار تابع $y = f(kx)$ نسبت به نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور طول‌ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ فشرده می‌شود.

نمودار تابع $y = f(۳x)$ نسبت به نمودار $y = f(x)$ در راستای افقی با ضریب $\frac{۱}{۳}$ فشرده شده است. پس نمودار تابع اصلی (قبل از فشردگی) به‌صورت روبه‌رو است:



بنابراین تابع f در محدودهٔ $(-۹, ۱۸)$ مثبت است. برای یافتن دامنهٔ تابع داده‌شده، باید نامعادلهٔ $(x+۲)f(x) \geq ۰$ را حل کنیم. جدول تعیین‌علامت این عبارت به‌صورت روبه‌رو است:

x		−۹		−۲		۱۸	
$x+۲$	−	|	−	۰	+	|	+
$f(x)$	−	۰	+	|	+	۰	−
$(x+۲)f(x)$	+	۰	−	۰	+	۰	−

بنابراین دامنهٔ تابع داده‌شده بازهٔ $[-۲, ۱۸] \cup [-۹, -\infty)$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۵ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: اگر x_1 و x_2 $(x_1<x_2)$ ریشه‌های متمایز معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، جدول تعیین علامت تابع $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y	موافق a علامت		مخالف a علامت		موافق a علامت		

ابتدا وارون تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$y=2-\sqrt{x+3} \Rightarrow \sqrt{x+3}=2-y \xrightarrow[y\le 2]{2-y\ge 0} x+3=(2-y)^2$$

$$\Rightarrow x=(2-y)^2-3 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=(2-x)^2-3 \Rightarrow g^{-1}(x)=(x-2)^2-3, x\le 2 \Rightarrow g^{-1}(x)=x^2-4x+1, x\le 2$$

اکنون نامعادلهٔ $f(x)\ge g^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x^3-3}{x}\ge x^2-4x+1 \Rightarrow \frac{x^3-3}{x}-x^2+4x-1\ge 0 \Rightarrow \frac{x^3-3-x^3+4x^2-x}{x}\ge 0 \Rightarrow \frac{4x^2-x-3}{x}\ge 0$$

$$4x^2-x-3=0 \Rightarrow x=1, x=-\frac{3}{4}$$

x		$-\frac{3}{4}$		0		1	
$4x^2-x-3$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{4x^2-x-3}{x}$	$-$	0	$+$	ت ن	$-$	0	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت و دامنهٔ وارون تابع g جواب نامعادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} f\ge g^{-1} \Rightarrow x\in\left[-\frac{3}{4},0\right)\cup[1,+\infty) \\ D_{g^{-1}}=(-\infty,2] \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x\in\left[-\frac{3}{4},0\right)\cup[1,2]$$

پس دو مقدار صحیح $x=1,2$ در جواب نامعادله وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۶ نکته: تابعی به فرم $y=ax+b$ را تابع خطی می‌گویند.

نکته: برای دو تابع f و g داریم:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)\ ,\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

f تابعی خطی است، پس:

$$f(x)=ax+b\ ,\ f(۰)=۲\Rightarrow b=۲\ ,\ f(x)=ax+۲\Rightarrow f(۱)=a+۲$$

$$f(f(۱))=۵\Rightarrow f(a+۲)=۵\Rightarrow a(a+۲)+۲=۵\Rightarrow a^{۲}+۲a-۳=۰\Rightarrow (a-۱)(a+۳)=۰\Rightarrow a=۱,a=-۳$$

$$a=۱\Rightarrow f(x)=x+۲\Rightarrow (\frac{۲f-g}{f+g})(-۲)=\frac{۲f(-۲)-g(-۲)}{f(-۲)+g(-۲)}=\frac{۰-۴}{۰+۴}=-۱$$

$$a=-۳\Rightarrow f(x)=-۳x+۲\Rightarrow (\frac{۲f-g}{f+g})(-۲)=\frac{۲f(-۲)-g(-۲)}{f(-۲)+g(-۲)}=\frac{۲\times ۸-۴}{۸+۴}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۷ نکته: معادلهٔ یک سهمی که رأس آن نقطه (h,k) باشد، به‌صورت $y=a(x-h)^{۲}+k$ است.

رأس سهمی و بالاترین نقطهٔ تابع f برهم منطبق هستند. بنابراین:

$$f(x)=۳-|x+۲|\ ,\ x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow f(-۲)=۳$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $(-۲,۳)$ است، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=a(x+۲)^{۲}+۳$ است.

محل تقاطع تابع f با محور طول‌ها برابر است با:

$$f(x)=۰\Rightarrow ۳-|x+۲|=۰\Rightarrow |x+۲|=۳\Rightarrow x+۲=\pm ۳\Rightarrow x=۱\ \text{یا}\ x=-۵$$

تابع f از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد، پس تابع g نیز از آن نقطه می‌گذرد و داریم:

$$g(۱)=۰\Rightarrow ۰=a(۱+۲)^{۲}+۳\Rightarrow ۹a=-۳\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

پس ضابطهٔ تابع g به‌صورت $y=-\frac{۱}{۳}(x+۲)^{۲}+۳$ است.

برای یافتن c کافی است عرض نقطهٔ تلاقی این سهمی با محور عرض‌ها را پیدا کنیم.

$$x=۰\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}(۰+۲)^{۲}+۳=-\frac{۱}{۳}\times ۴+۳=-\frac{۴}{۳}+\frac{۹}{۳}=\frac{۵}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۸ طبق تعریف توابع چند جمله‌ای ، در چند جمله‌ای $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}$ ، توان متغیر x عددی حسابی است. پس در چند جمله‌ای $P(x)$ داریم:

$$(n-۲)\in w\Rightarrow n-۲\geq ۰\Rightarrow n\geq ۲$$

$$\frac{۲n+۳}{n}\in w\Rightarrow \left(۲+\frac{۳}{n}\right)\in w\Rightarrow n=۳$$

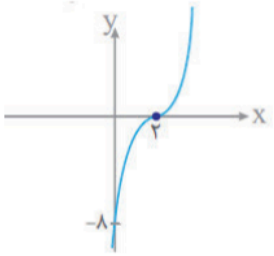
با $n=۳$ تابع $P(x)$ را بازنویسی می کنیم.

$$\Rightarrow P(x)=x^{۳}+x^{۳}-۲x^{۱}+۱+۳\Rightarrow P(x)=۲x^{۳}-۲x+۴$$

$$P(۱+\sqrt{۲})=۲(۱+\sqrt{۲})^{۳}-۲(۱+\sqrt{۲})+۴=۲(۱+۳\sqrt{۲}+۳\times ۲+۲\sqrt{۲})-۲-۲\sqrt{۲}+۴=۸\sqrt{۲}+۱۶=۸(\sqrt{۲}+۲)$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۹ ابتدا با کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای، ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:



$$f(x)=(x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸)+۸-m=(x-۲)^{۳}+۸-m$$

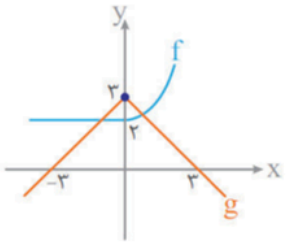
حال نمودار تابع f را بدون توجه به مقدار $۸-m$ رسم می‌کنیم:

برای این که این نمودار از ناحیهٔ چهارم عبور نکند، باید آن را حداقل ۸ واحد به بالا منتقل کنیم؛ پس:

$$۸-m\geq ۸\rightarrow -m\geq ۰\rightarrow m\leq ۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۰ ابتدا ضابطهٔ f را ساده می کنیم و سپس نمودار دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}۲x^{۳}+۲ & ;x\geq ۰\\ ۲ & ;x<۰\end{cases}$$

با توجه به نمودارها، دو تابع در دو نقطه با هم برخورد می‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۱ طبق تعریف توابع چند جمله‌ای ، در چند جمله‌ای $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}$ ، توان متغیر x عددی حسابی است. پس در چند جمله‌ای $P(x)$ داریم:

$$(n-۲)\in w\Rightarrow n-۲\geq ۰\Rightarrow n\geq ۲$$

$$\frac{۲n+۳}{n}\in w\Rightarrow \left(۲+\frac{۳}{n}\right)\in w\Rightarrow n=۳$$

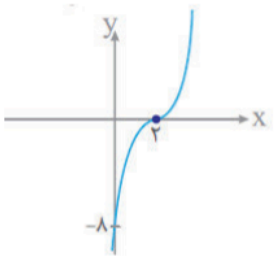
با $n=۳$ تابع $P(x)$ را بازنویسی می کنیم.

$$\Rightarrow P(x)=x^{۳}+x^{۳}-۲x^{۱}+۱+۳\Rightarrow P(x)=۲x^{۳}-۲x+۴$$

$$P(۱+\sqrt{۲})=۲(۱+\sqrt{۲})^{۳}-۲(۱+\sqrt{۲})+۴=۲(۱+۳\sqrt{۲}+۳\times ۲+۲\sqrt{۲})-۲-۲\sqrt{۲}+۴=۸\sqrt{۲}+۱۶=۸(\sqrt{۲}+۲)$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۲ ابتدا با کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای، ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:



$$f(x)=(x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸)+۸-m=(x-۲)^{۳}+۸-m$$

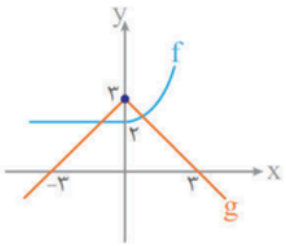
حال نمودار تابع f را بدون توجه به مقدار $۸-m$ رسم می‌کنیم:

برای این که این نمودار از ناحیهٔ چهارم عبور نکند، باید آن را حداقل ۸ واحد به بالا منتقل کنیم؛ پس:

$$۸-m\geq ۸\rightarrow -m\geq ۰\rightarrow m\leq ۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۳ ابتدا ضابطهٔ f را ساده می کنیم و سپس نمودار دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

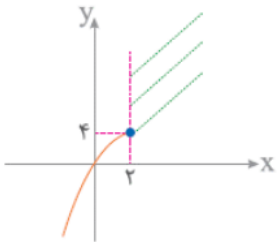


$$f(x)=\begin{cases}۲x^{۳}+۲ & ;x\geq ۰\\ ۲ & ;x<۰\end{cases}$$

با توجه به نمودارها، دو تابع در دو نقطه با هم برخورد می‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۴ نمودار تابع f به صورت زیر است:



$$f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۴x & ;x\le ۲\\ ۲x+a & ;x>۲\end{cases}$$

با توجه به نمودار، به ازای $x>۲$ مقدار تابع باید عددی بزرگ تر یا مساوی ۴ باشد، پس:

$$۲(۲)+a\ge ۴\Rightarrow a\ge ۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۵ نمودار سهمی بالا خط قرار دارد پس:

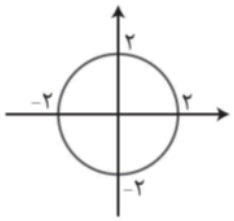
$$x^{۲}-ax+۱>b(\frac{a}{۲}-x)\Rightarrow x^{۲}-ax+۱>\frac{ab}{۲}-bx\Rightarrow$$

$$x^{۲}-ax+bx+۱-\frac{ab}{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}-(a-b)x+۱-\frac{ab}{۲}>۰\Rightarrow$$

$$\begin{cases}۱>۰\\ \Delta<۰\Rightarrow (a-b)^{۲}-۴(۱)(۱-\frac{ab}{۲})<۰\Rightarrow (a-b)^{۲}-۴+۲ab<۰\end{cases}\Rightarrow (a-b)^{۲}+۲ab<۴\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}<۴$$

نمودار رابطه را به مؤلفهٔ اول a و مؤلفهٔ دوم b در نظر بگیرید که $a^{۲}+b^{۲}<۴$.

نمودار این رابطه را رسم می‌کنیم. نمودار دایره‌ای به مرکز (۰ و ۰) و شعاع ۲ داریم:



$$S=\pi r^{۲}=\pi(۲)^{۲}=۴\pi$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۶

$$f(x)=ax+b\Rightarrow fog(x)=f(\frac{۱}{x})=\frac{a}{x}+b$$

مطابق شکل $b=۴$ است.

$$f(x)=ax+۴\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{۴}{a}$$

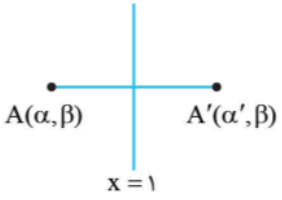
$$(f+۲f^{-۱})(x)=(a+\frac{۲}{a})x+(۴-\frac{۸}{a})\xrightarrow{\text{از مبدا می گذرد}}۴-\frac{۸}{a}=۰\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}fog(x)=\frac{۲}{x}+۴\\ (f+۲f^{-۱})(x)=۳x\end{cases}\Rightarrow ۳x=\frac{۲}{x}+۴\Rightarrow ۳x^{۲}-۴x-۲=۰$$

مطابق شکل $\Rightarrow x=\frac{۲+\sqrt{۱۰}}{۳}$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۷ قرینه نقطه نسبت به خط $x=۱$:



$$\frac{\alpha+\alpha'}{۲}=۱\Rightarrow\alpha'=۲-\alpha$$

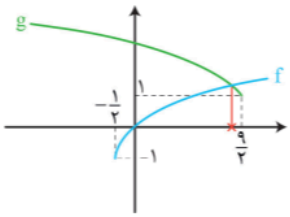
پس وقتی نمودار را نسبت به $x=۱$ قرینه می‌کنیم، y تغییر نمی‌کند و x تبدیل به $۲-x$ می‌شود:

$$y=\sqrt{۲(۲-x)+۱}-۱=\sqrt{-۲x+۵}-۱$$

ادامه مراحل:

$$y=\sqrt{-۲(x-۲)+۵}-۱+۲\Rightarrow y=\sqrt{-۲x+۹}+۱$$

حالا برای حل نامعادله $g(x)>f(x)$ نقطه تقاطع، با حدس یا حل معادله $x=۴$ به دست می آید. پس



$$(a,b)=(-\frac{۱}{۲},۴)\Rightarrow b-a=۴/۵$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۸ بجای تلاقی $f^{-۱}$ با $g(x)=\frac{۶}{x}$، خود f را با $g^{-۱}$ تلاقی می‌دهیم

$$g(x)=\frac{۶}{x}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۶}{x}=f(x)\Rightarrow x^{۳}+x=\frac{۶}{x}\Rightarrow x^{۴}+x^{۲}=۶\xrightarrow[x^{۲}\geq ۰]{}x^{۲}=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

پس عرض نقاط A و B، $\pm\sqrt{۲}$ است و داریم:

$$x=\frac{۶}{y}=\frac{۶}{\pm\sqrt{۲}}\Rightarrow x=\frac{\pm۶\sqrt{۲}}{۲}=\pm۳\sqrt{۲}$$

یعنی مختصات B و A به صورت $A\left|\begin{matrix}۳\sqrt{۲}\\ \sqrt{۲}\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۳\sqrt{۲}\\ -\sqrt{۲}\end{matrix}\right.$ است.

معادله خط گذرنده از نقاط B و A به صورت $y=\frac{x}{۳}$ است و ما می خواهیم بالاتر از $y=\frac{۳}{x}$ باشد.

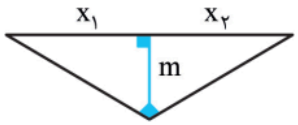
$$\frac{x}{۳}>\frac{۳}{x}\Rightarrow\frac{x}{۳}-\frac{۳}{x}>۰\Rightarrow\frac{x^{۲}-۹}{۳x}>۰$$

$$\Rightarrow x>۳\ \text{یا}\ -۳<x<۰$$

x		-۱		۰		۱	
P	-		+ ج		-		+ ج

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۹ با توجه به رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$m^{۲}=|x_{۱}|x_{۲}\rightarrow m^{۲}=-۲m\xrightarrow{m\neq ۰}m=-۲$$

حالا برای برد تابع $y=\frac{x^{۲}+۲}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^{۲}+۲}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\frac{x^{۲}+۱+۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\frac{x^{۲}+۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\sqrt{x^{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

که می‌دانیم عبارت $a+\frac{۱}{a}$ برای اعداد مثبت a همیشه بزرگتر یا مساوی ۲ است.

و یعنی برد این تابع فقط عدد یک را از اعداد طبیعی ندارد.

$$\Rightarrow y\geq ۲$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۰ تابع g را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۵f+۱}{f-۵}=۵+\frac{۲۶}{f-۵}$$

حالا داریم:

$$-۱\le f\le ۳\xrightarrow{-۵}-۶\le f-۵\le -۲$$

معکوس و در ۲۶ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲۶}{-۶}\ge\frac{۳۶}{f-۵}\ge\frac{۲۶}{-۲}\xrightarrow{+۵}\frac{۲}{۳}\ge ۵+\frac{۲۶}{f-۵}\ge -۸$$

پس برد g برابر $[-۸,\frac{۲}{۳}]$ است و داریم:

$$\begin{cases}a=-۸\\ b=\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow |a+۹b|=\left|-۸+۹(\frac{۲}{۳})\right|=|-۲|=۲$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۱ با توجه به تعریف تابع وارون از تساوی $f^{-۱}(a)=b$، تساوی $f(b)=a$ حاصل می‌شود؛ پس داریم:

$$(f^{-۱}of^{-۱})(۵)=۱\Rightarrow f^{-۱}(۵)=f(۱)\Rightarrow f(f(۱))=۵$$

ضابطه تابع f به صورت $f(x)=۲x+\sqrt{x-m}\ ;\ x\ge m$، پس داریم:

$$f(۱)=۲+\sqrt{۱-m}\Rightarrow f(f(۱))=f(۲+\sqrt{۱-m})=۵$$

$$\Rightarrow ۴+۲\sqrt{۱-m}+\sqrt{۲-m+\sqrt{۱-m}}=۵\Rightarrow \sqrt{۲-m+\sqrt{۱-m}}=\overbrace{۱-۲\sqrt{۱-m}}^{\ge ۰}$$

حاصل یک رادیکال همواره نامنفی است، پس داریم:

$$۱-۲\sqrt{۱-m}\ge ۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}\ge\sqrt{۱-m}\Rightarrow\frac{۱}{۴}\ge ۱-m\xrightarrow{۱-m\ge ۰}۱\ge m\ge\frac{۳}{۴}$$

در ادامه داریم:

$$۲-m+\sqrt{۱-m}=۱+۴(۱-m)-۴\sqrt{۱-m}\Rightarrow ۵\sqrt{۱-m}=\overbrace{۳-۳m}^{۳(۱-m)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۱-m}(۵-۳\sqrt{۱-m})=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\ m=-\frac{۱۶}{۹}\end{cases}$$

با توجه به محدوده قابل قبول برای m، نتیجه می‌گیریم $m=۱$، حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=۲x+\sqrt{x-۱}\Rightarrow f(m)=f(۱)=۲$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۲ تابع f با برد مثبت اکیداً نزولی است پس $\frac{۱}{f(x)}$ تابعی اکید صعودی و $f(x)-\frac{۱}{f(x)}$ تابعی نزولی است. برد تابع g(x) بازهٔ $[g(۵),g(-۱)]$ است.

$$g(-۱)=f(-۱)-\frac{۱}{f(-۱)}=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$
$$g(۵)=f(۵)-\frac{۱}{f(۵)}=۱-\frac{۱}{۱}=۰$$
$$\Rightarrow R_g=[۰,\frac{۳}{۲}]$$

اکنون برد تابع $y=\cos^۳(\frac{\pi g(x)}{۲})$ را می‌یابیم.

$$۰\le g(x)\le\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\times\frac{\pi}{۲}}۰\le\frac{\pi g(x)}{۲}\le\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le\cos\frac{\pi g(x)}{۲}\le۱$$

$$\xrightarrow{\text{توان‌سه}}\frac{-\sqrt{۲}}{۴}\le\cos^۳\frac{\pi g(x)}{۲}\le۱\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=-(۲)^{-\frac{۳}{۲}}\\ b=۱\end{cases}\Rightarrow ab=-۲^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow\log_{\sqrt{۲}}-ab=\log_{\frac{۱}{۲^{\frac{۱}{۲}}}}۲^{-\frac{۳}{۲}}=-۳$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۳ در گزینه ۱ تابع $[x^۳]$ اکیداً صعودی نیست. در گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) فقط $x\in\mathbb{Z}$ امکان دارد. تا مخرج صفر نباشد و زیر رادیکال منفی نشود.

پس داریم:

۲) $x+[x]+\frac{۱}{[x]+[-x]+۱}\overset{x\in\mathbb{Z}}{=}۲x+۱$

۳) $\sqrt{x}+\sqrt{[x]-x}\overset{x\in\mathbb{Z}}{=}\sqrt{x}+۰$

۴) $x^۲+\sqrt{[x]+[-x]}\overset{x\in\mathbb{Z}}{=}x^۲+۰$

در بین اینها فقط $[۲x-۱]$ با دامنه $\mathbb{Z}$ اکیداً صعودی است. و $[x^۲]$ و $[\sqrt{x}]$ به ترتیب غیریکنوا و صعودی غیراکید هستند.

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۴ برای اینکه رابطه صورت سؤال یک تابع صعودی باشد، باید رابطه $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ برقرار باشد، بنابراین ۳ حالت وجود دارد:

۱) $f(1) < f(2) < f(a^3) \Rightarrow a < a^2 - 1 < a^2$

۲) $f(1) < f(a^3) < f(2) \Rightarrow a < a^2 < a^2 - 1$

۳) $f(a^3) < f(1) < f(2) \Rightarrow a^2 < a < a^2 - 1$

حالت دوم و سوم به دلیل اینکه $a^2 - 1 < a^2$، قابل قبول نیست، و تنها حالت اول قابل قبول است و با توجه به برقراری $a^2 - 1 < a^2$، کافی‌ست نامعادله $a < a^2 - 1$ و $2 < a^3$ را حل کنیم. پس داریم:

$$2 < a^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} < a$$

$$a < a^2 - 1 \Rightarrow 0 < a^2 - a - 1 \Rightarrow a < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ یا } a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

از اشتراک دو بازه فوق، به بازه $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌رسیم. داریم:

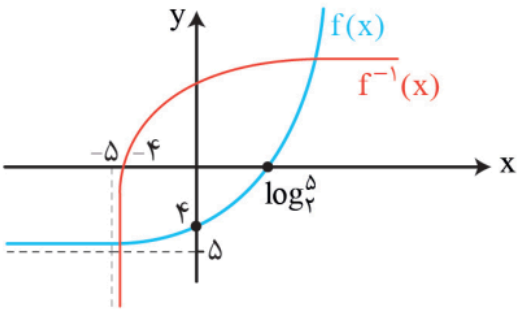
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-5}{2(1-\sqrt{5})} = \frac{-2}{1-\sqrt{5}} = \frac{-2}{m-\sqrt{n}}$$

بنابراین $\begin{cases} m = 1 \\ n = 5 \end{cases}$ که $m^2 + n^2 = 26$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۵ با توجه به اینکه $f(x) = 2^x - 5$ و $f^{-1}(x) = \log_2(x+5)$ است، با کمک رسم نمودار جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

	-5	-4	$\log_2^5$
$-f(x)$	+	+ ۰	−
$f'(x)$	− ۰	+	+
$\frac{-f(x)}{f^{-1}(x)}$	− ت ن	+	−

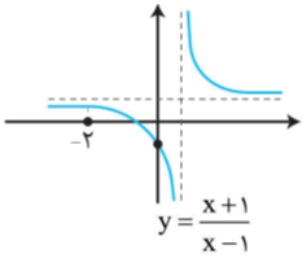


بنابراین دامنه مورد قبول برای تابع $y = \sqrt{\frac{-f(x)}{f^{-1}(x)}}$ بازه $(-4, \log_2 5]$ است و با توجه به اینکه $2 < \log_2 5 < 3$، اعداد صحیح درون دامنه به صورت زیر خواهند بود:

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۶



$$f(x) = -2 \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right)}_{\text{بین صفر و یک است}} \Rightarrow 0 \geq f(x) > -2$$

پس داریم:

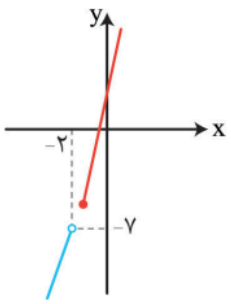
$$f(x) \leq 0 \Rightarrow g(f(x)) = \frac{|f|-1}{|f|+1} = \frac{-f-1}{-f+1} = \frac{f+1}{f-1} \quad (-2 < f \leq 0)$$

پس برد بین $g(0)$ و $g(-2)$ قرار می‌گیرد.

یعنی $\mathbb{R}_{gof} = [-1, \frac{1}{3}]$ که دو عدد صحیح دارد.

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۷ باید $x^۲+nx\pm ۱$ در دامنه $x\geq -۱$ یک به یک باشد یعنی $x_۲=\frac{-n}{۲}\leq -۱$ پس $n\geq ۲$ و همچنین در ابتدای خود، مقداری بیشتر یا مساوی ۷- داشته باشد.



$$f(-۱)=۱-n+۱\geq -۷\Rightarrow ۹\geq n$$

بنابراین $۲\leq n\leq ۹$

حالا مقدار $f^{-۱}(۲)$ برابر است با: $f(x)=۲$

$$n^۲+nx+۱=۲\Rightarrow x^۲+nx-۱=۰$$

ریشه بزرگتر این معادله $\frac{-n+\sqrt{n^۲+۴}}{۲}$ است که با افزایش n ، کم می‌شود. پس حداقل آن به ازای $n=۹$ برابر $\frac{\sqrt{۸۵}-۹}{۲}$ است. حداکثرش هم $\frac{\sqrt{۸}-۲}{۲}$ است.

(ماروِل ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۸ f اکیداً صعودی و $f(۰)=-۱$ و $f(۱)=۴$.

پس $f^{-۱}$ در ۴ و ۱- می‌شکند یعنی در ضابطه‌اش $|x-۴|$ و $|x+۱|$ دارد.

$$x\geq ۱\Rightarrow f(x)=۳x+۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۳},x\geq ۴$$

$$۰\leq x\leq ۱\Rightarrow f(x)=۵x-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۵},۱\leq x\leq ۴$$

$$x<۰\Rightarrow f(x)=۳x-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳},x<۱$$

چون شیب $f^{-۱}$ در ابتدا و انتها $\frac{۱}{۳}$ است پس ضریب x بیرون باید $\frac{۱}{۳}$ باشد.

اختلاف شیب ناحیه وسطی با ابتدا و انتها $\frac{۲}{۱۵}$ است. پس ضریب قدر مطلق‌ها $\frac{۱}{۱۵}$ بوده است.

$$f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۱۵}(|x-۴|-|x+۱|)$$

پس $a=۵$ و $c=۴$ و $d=-۱$

و بنابراین $acd=-۲۰$

(ماروِل ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۹ می‌دانیم $-۱\leq \cos x\leq ۱$ است، پس:

$$۰\leq \cos^۲ x\leq ۱\Rightarrow ۱\leq ۱+\cos^۲ x\leq ۲$$

بنابراین باید برد تابع $f(x)=\log_۲ ۴x$ را به‌ازای ورودی $[۱,۲]$ به دست آوریم. از آن جایی که تابع f اکیداً صعودی است، پس:

$$۱\leq x\leq ۲\Rightarrow ۴\leq ۴x\leq ۸\Rightarrow \underbrace{\log_۲ ۴}_{۲}\leq \log_۲ ۴x\leq \underbrace{\log_۲ x}_{۳}$$

پس برد تابع fog به صورت بازهٔ $[۲,۳]$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۰

$$g(x)=x-۲\left[\frac{x}{۲}\right]=۲\frac{x}{۲}-۲\left[\frac{x}{۲}\right]=۲\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)\Rightarrow ۰\le\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]<۱\Rightarrow ۰\le ۲\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)<۲$$

بنابراین باید برد تابع $f(x)=\log_{۲}^{۴x}$ را به‌ازای ورودی $[۰,۲)$ به دست آوریم. از آن جایی که تابع f اکیداً صعودی است، پس:

پس برد تابع fog به صورت بازهٔ $(-\infty,۳)$ است. $۰\le x<۲\Rightarrow ۰\le ۴x<۸\Rightarrow \log_{۲}^{۴x}<\log_{۲}^{۸}$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۱

طبق تعریف توابع چند جمله‌ای، در چند جمله‌ای $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+...+c$ ، توان متغیر x عددی حسابی است. پس در چند جمله‌ای $f(x)$ داریم:

$$(n-۲)\in w\Rightarrow n-۲\ge ۰\Rightarrow n\ge ۲$$

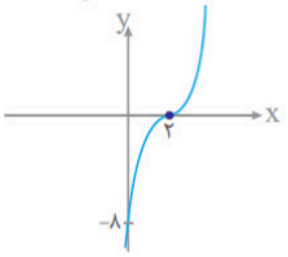
$$\frac{۲n+۳}{n}\in w\Rightarrow\left(۲+\frac{۳}{n}\right)\in w\Rightarrow n=۳$$

با $n=۳$ تابع $f(x)$ را بازنویسی می کنیم. $\Rightarrow P(x)=x^{۳}+x^{۳}+۲x^{۱}+۱+۳\Rightarrow f(x)=۲x^{۳}+۲x+۴$

این تابع از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=۲x^{۳}$ و $y=۲x+۴$ به دست آمده، پس اکیداً صعودی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۲



ابتدا با کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای، ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸)+۸-m=(x-۲)^{۳}+۸-m$$

حال نمودار تابع f را بدون توجه به مقدار $۸-m$ رسم می‌کنیم:

برای این که این نمودار از ناحیهٔ چهارم عبور نکند، باید آن را حداقل ۸ واحد به بالا منتقل کنیم؛ پس:

$$۸-m\ge ۸\rightarrow -m\ge ۰\rightarrow m\le ۰$$

پس بیشترین مقدار m برابر صفر است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۳

ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. طبق اتحاد مکعب دو جمله ای داریم: $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸=(x-۲)^{۳}$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(۳\sqrt{۳})$ تابع $y=f(x)$ را برابر $۳\sqrt{۳}$ می‌گذاریم:

$$(x-۲)^{۳}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow(x-۲)^{۳}=(\sqrt{۳})^{۳}\Rightarrow x-۲=\sqrt{۳}\Rightarrow x=۲+\sqrt{۳}$$

در ضمن با توجه به رادیکال‌های مرکب و اتحادها داریم:

$$۲+\sqrt{۳}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt{۷+۲\sqrt{۱۲}}\Rightarrow f^{-۱}(۳\sqrt{۳})=\sqrt{۷+۲\sqrt{۱۲}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۴ با یک واحد انتقال افقی نمودار $y=f(x+1)$ به سمت راست نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید. بنابراین نمودار تابع خطی $f(x)$ از نقاط $(۱,۵)$ و $(۷,-۱)$ می گذرد.

$$f(x)=-x+۶ \quad , \quad D_f=(۱,۷]$$

$$(fof)(x)=-(-x+۶)+۶=x$$

$$D_{(fof)(x)}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x\in(۱,۷] \mid -x+۶\in(۱,۷]\}$$

$$۱<-x+۶\leq ۷ \rightarrow -۱\leq x<۵$$

$$D_{fof}=(۱,۷]\cap[-۱,۵)=(۱,۵)$$

$$(fof)(x)=x \rightarrow R_{fof}=(۱,۵)$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۵

$$f(x)=۱+۳+۵+\ldots+(۲x-۱)=x^۲$$

$$g(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^۲}=|x| \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} g(x)=x$$

حال با توجه به رابطهٔ $f(x_۱)=g(x_۲)$ باید $x_۱^۲=x_۲$ باشد، پس:

$$(۱)\begin{cases}x_۱=۱\\x_۲=۱\end{cases} \quad (۲)\begin{cases}x_۱=۲\\x_۲=۴\end{cases} \quad (۳)\begin{cases}x_۱=۳\\x_۲=۹\end{cases} \quad (۴)\begin{cases}x_۱=۴\\x_۲=۱۶\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۶

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & ;x>۱\\ ۱-x^۲ & ;x<۱\end{cases} \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۲واحد}} y=\begin{cases}\sqrt{x+۱} & ;x>-۱\\ ۱-(x+۲)^۲ & ;x<-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\to ۲x} y=\begin{cases}\sqrt{۲x+۱} & ;x>-\frac{۱}{۲}\\ ۱-(۲x+۲)^۲ & ;x<-\frac{۱}{۲}\end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{محور y ها}\\ x\to -x}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\begin{cases}\sqrt{-۲x+۱} & ;x<\frac{۱}{۲}\\ ۱-(-۲x+۲)^۲ & ;x>\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

حال با مقایسهٔ تابع $y=\begin{cases}f(x) & ;x>a\\ g(x) & ;x<a\end{cases}$ و تابع انتقال داده شده نتیجه می‌گیریم $a=\frac{۱}{۲}$ و $f(x)=۱-(-۲x+۲)^۲$ و $g(x)=\sqrt{-۲x+۱}$ است. پس:

$$f(۲a)+g(-۳a)=f(۱)+g\left(-\frac{۳}{۲}\right)=(۱-۰)+\sqrt{۳+۱}=۱+۲=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۷ تابع f از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x$ و $y=\sqrt{x}-۲$ به دست آمده، پس اکیداً صعودی است.

$$f(f(x))\le f(\sqrt{x})\Rightarrow f(x)\le\sqrt{x}\Rightarrow x+\sqrt{x}-۲\le\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x-۲\le ۰\Rightarrow x\le ۲$$

از طرفی به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، باید $x\ge ۰$ باشد، حالا دامنهٔ تابع $fof(x)$ را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)\in D_f\Rightarrow x+\sqrt{x}-۲\ge ۰\Rightarrow(\sqrt{x}-۱)(\underbrace{\sqrt{x}+۲}_{\text{همواره مثبت}})\ge ۰$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}-۱\ge ۰\Rightarrow\sqrt{x}\ge ۱\Rightarrow x\ge ۱$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می‌گیریم $۱\le x\le ۲$ است که شامل اعداد صحیح $x=۱$ و $x=۲$ می‌باشد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۸ چون ضرایب a, b, c صحیح هستند پس مقدار تابع $f(x)$ در هر نقطهٔ صحیح دارای مقدار صحیح است. با توجه به اینکه تابع $f(x)$ اکیدا صعودی و $f(۱)=۱$ و $f(۳)=۳$ است، پس مقدار $f(۲)$ باید برابر ۲ باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}f(۱)=۱\\ f(۲)=۲\\ f(۳)=۳\end{cases}\rightarrow f(x)=k(x-۱)(x-۲)(x-۳)+x$$

$$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c\rightarrow k=۱$$

با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ داده شده مقدار k برابر ۱ است، پس:

$$f(x)=(x-۱)(x-۲)(x-۳)+x$$

محل برخورد f با محور yها: $x=۰\rightarrow f(۰)=(-۱)(-۲)(-۳)+۰=-۶$

فاصله نقطه برخورد از مبدأ مختصات $=۶\rightarrow$ نقطه برخورد $(۰,-۶)$

توجه: ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان با جایگذاری نقاط $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ و $(۳,۳)$ در ضابطهٔ $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ هم به‌دست آورد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۹

$$\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x\Rightarrow\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}-(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})=۰$$

$$\Rightarrow(۱-\sqrt{x})\left(\frac{۱}{۱+\sqrt{x}}-(۱+\sqrt{x})\right)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱-\sqrt{x}=۰\Rightarrow\sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱ & \checkmark\\ \frac{۱}{۱+\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x}\Rightarrow(۱+\sqrt{x})^{۲}=۱\Rightarrow\begin{cases}۱+\sqrt{x}=۱\to\sqrt{x}=۰\to x=۰ & \checkmark\\ ۱+\sqrt{x}=-۱\to\sqrt{x}=-۲ & \times\end{cases}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ ۲ ریشه دارد $\Rightarrow a=۲$

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴x+۵+[x]+[-x]}$$

حالت اول : $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=۰\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴x+۵}$

$$D_f=\underbrace{x^{۲}-۴x+۵}_{\substack{\Delta<۰\\ a>۰}}\geq۰\Rightarrow\text{همواره بالای محور x ها}$$

$$D_f=\mathbb{R}\xrightarrow[x\in\mathbb{Z}\text{ با}]{\text{اشتراک}}D_f=\mathbb{Z}$$

حالت دوم $x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=-۱\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}\Rightarrow f(x)=\sqrt{(x-۲)^{۲}}=|x-۲|$

$$D_f=\mathbb{R}\xrightarrow[x\notin\mathbb{Z}\text{ با}]{\text{اشتراک}}D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

اجتماع بین حالت اول و دوم $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۰

برای محاسبهٔ $f(-۱)$ عبارت $\frac{mx+n}{nx+m}$ را برابر ۱- قرار می‌دهیم.

$$\frac{mx+n}{nx+m}=-۱\Rightarrow mx+n=-nx-m$$

$$mx+nx=-m-n\to x(m+n)=-(m+n)$$

$$\xrightarrow{m+n\neq۰}x=-۱$$

حال برای محاسبهٔ $f(-۱)$ کافی است $x=-۱$ را جایگذاری کنیم:

$$f(-۱)=۱۳(-۱)^{۱۳}+۱۲(-۱)^{۱۲}+۱۱(-۱)^{۱۱}+\ldots+۳(-۱)^{۳}+۲(-۱)^{۲}+(-۱)+۵$$

$$=-۱۳+۱۲-۱۱+۱۰-۹+۸-۷+۶-۵+۴-۳+۲-۱+۵=-۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۱ می‌دانیم ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین داریم: $x\in\mathbb{Z}\to[x]+[-x]=0\to f(x)=0$

در حالت $x\in\mathbb{Z}$ تابع $f(x)$ همانی نیست، پس باید $x\notin\mathbb{Z}$ باشد و بازهٔ $(b,-1)$ نباید شامل اعداد صحیح باشد، پس کمترین مقدار b برابر ۲- است.

$$x\notin\mathbb{Z}\to[x]+[-x]=-1\to f(x)=-\sqrt{x^2+a}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ تابع همانی باشد باید $a=0$ باشد:

$$f(x)=-\sqrt{x^2+a}\xrightarrow{a=0}-\sqrt{x^2}=-|x|$$

$$f(x)=-|x|\xrightarrow[x<0]{x\in(b,-1)}f(x)=-(-x)=x$$

بنابراین کمترین مقدار $a+b$ برابر $-2+0=-2$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۲

$$f(x)=(m^3-3m^2+4)x^2+mx-4$$

$f(x)$ اکیداً صعودی است بنابراین داریم:

$$m^3-3m^2+4=0\Rightarrow(m+1)(m^2-4m+4)=0$$

$$\Rightarrow(m+1)(m-2)^2=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\to\text{غ ق ق}\to\text{چون }f(x)\text{اکیداً نزولی می‌شود}\\ m=2\ \checkmark\to\text{چون }f(x)\text{اکیداً صعودی است}\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{4x+1}{nx-1}\xrightarrow[\text{اکیدانزولی}]{g(x)}n=0$$

$$\begin{cases}f(x)=2x-4\\ g(x)=-4x-1\end{cases}\Rightarrow 2f+g=2(2x-4)+(-4x-1)=\cancel{4x}-8-\cancel{4x}-1=-9$$

تابع $2f+g$ تابعی ثابت است که هم صعودی است و هم نزولی.

بررسی گزینه‌ها:

۱ تابعی اکیداً صعودی است.

۲ تابعی اکیداً نزولی است.

۳ تابعی صعودی است.

۴ تابعی ثابت است.

$$-1\le\cos x\le1\to0\le1+\cos x\le1$$

$$|1+\cos x|=1+\cos x\to|1+\cos x|-\cos x=1+\cos x-\cos x=1$$

بنابراین تابع $2f+g$ از نظر یکنوایی با تابع $y=|1+\cos x|-\cos x$ یکسان است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۳

با توجه به نمودار $\xrightarrow{\text{نقاط}}\begin{cases}(۰,۲)\\(۳,۰)\end{cases}\Rightarrow m_f=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۰-۲}{۳-۰}=\frac{-۲}{۳}$

$f(x)=\frac{-۲}{۳}x+b\xrightarrow{\text{عرض از مبدا}=۲}b=۲$

$f(x)=\frac{-۲}{۳}x+۲$

$f(x)$ طبق نمودار $\Rightarrow D_{f(x)}=[۰,+\infty)-\{۱\}$

$$D_{fof(x)}=\begin{cases}x\in D_f\Rightarrow x\in[۰,+\infty)-\{۱\} & (I)\\ f(x)\in D_f\Rightarrow\begin{cases}\frac{-۲}{۳}x+۲\geq ۰\Rightarrow\frac{۲}{۳}x\leq ۲\Rightarrow x\leq ۳\\ \frac{-۲}{۳}x+۲\neq ۱\Rightarrow\frac{-۲}{۳}x\neq -۱\Rightarrow x\neq\frac{۳}{۲}\end{cases}\rightarrow x\in(-\infty,۳]-\{\frac{۳}{۲}\} & (II)\end{cases}$$

$\xrightarrow{I\cap II}[۰,۳]-\{۱,\frac{۳}{۲}\}$

$y=fof(x)-f(x)\Rightarrow D_y=D_{fof}\cap D_f$

$\Rightarrow D_y=[۰,۳]-\{۱,\frac{۳}{۲}\}\cap[۰,+\infty)-\{۱\}\rightarrow D_y=[۰,۳]-\{۱,\frac{۳}{۲}\}$ (۱)

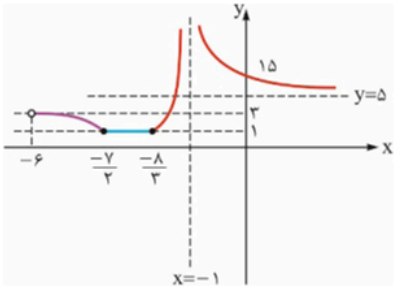
$D_{g(x)}=fof(x)-f(x)\geq ۰\Rightarrow f(f(x))\geq f(x)\xrightarrow{f\text{اکیداً نزولی است}}f(x)\leq x$

$\Rightarrow\frac{-۲}{۳}x+۲\leq x\Rightarrow\frac{۵}{۳}x\geq ۲\Rightarrow x\geq\frac{۶}{۵}$ (۲)

(۱),(۲) $\xrightarrow{\text{اشتراک}}\left[\frac{۶}{۵},۳\right]-\{\frac{۳}{۲}\}$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۴ ریشه مخرج $x=-1$ اضافه می‌کنیم:



$$x>-1\Rightarrow \frac{3x+8+2x+7}{x+1}=\frac{5x+15}{x+1}$$

$$\frac{-8}{3}<x<-1\Rightarrow \frac{3x+8+2x+7}{-x-1}=\frac{5x+15}{-x-1}$$

$$y\left(-\frac{8}{3}\right)=1$$

$$\frac{-7}{2}\le x\le\frac{-8}{3}\Rightarrow \frac{-3x-8+2x+7}{-x-1}=\frac{-x-1}{-x-1}=1 \qquad x\neq -1$$

$$-6<x<\frac{-7}{2}\Rightarrow \frac{-3x-8-2x-7}{-x-1}=\frac{-5x-15}{-x-1}=\frac{5x+15}{x+1}$$

بنابراین برد تابع f شامل تمام اعداد طبیعی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۵

$$f(x)+g(x)=f(x)\times g(x)\Rightarrow f(x)=f(x)\times g(x)-g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)\big(f(x)-1\big)$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)}{f(x)-1}\Rightarrow g\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{f\left(f^{-1}(x)\right)}{f\left(f^{-1}(x)\right)-1}\Rightarrow (gof^{-1})(x)=\frac{x}{x-1}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۶

$y=x^3-4\Rightarrow$ یک به یک است $\Rightarrow$ اکیداً صعودی است

$y=12x-20\Rightarrow$ یک به یک است $\Rightarrow$ اکیداً صعودی است

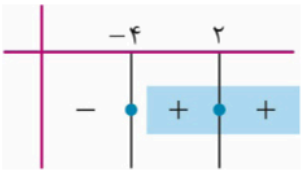
حال برای اینکه $f(x)$ یک به یک باشد، باید برد هر ضابطه با هم اشتراک نداشته باشند:

$$x^3-4\text{برد}\Rightarrow x>a\Rightarrow x^3>a^3\Rightarrow x^3-4>a^3-4\Rightarrow \text{برد}=(a^3-4,+\infty)$$

$$12x-20\text{برد}\Rightarrow x\le a\Rightarrow 12x\le 12a\Rightarrow 12x-20\le 12a-20\Rightarrow \text{برد}=(-\infty,12a-20]$$

در صورتی بردها اشتراک ندارند که :

$$a^3-4\ge 12a-20\Rightarrow a^3-12a+16\ge 0$$



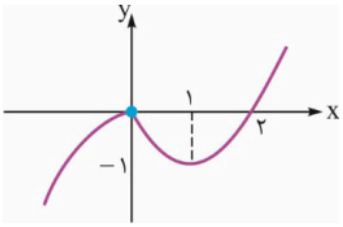
$$\Rightarrow (a-2)(a^2+2a-8)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a-2)(a+4)\ge 0$$

$$\Rightarrow (a-2)^2(a+4)\ge 0\Rightarrow a\ge -4$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۷ ابتدا باید $f(x)\times g(x)$ را پیدا کنید پس داریم:



$$fg=\begin{cases}x^{۲}-۲x & ;x>۰\\ ۰ & ;x=۰\\ -x^{۲}+۲x & ;x<۰\end{cases}$$

حال می‌دانیم در بازهٔ $-۱\le x\le ۰$ تابع اکیداً نزولی خواهد بود بنابراین ضابطه وارون آن برابر است با:

$$y=x^{۲}-۲x\to y=(x-۱)^{۲}-۱\to\sqrt{y+۱}=|x-۱|\xrightarrow{-۱\le x\le ۰}\sqrt{y+۱}=-x+۱\to x=۱-\sqrt{y+۱}$$

$$\to (fg)^{-۱}(x)=۱-\sqrt{x+۱},-۱\le x\le ۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۸

$$\text{طبق شکل}\begin{cases}g(x)\ge ۰\to x\ge ۲\cup x\le -۲\\ g(x)<۰\to -۲<x<۲\end{cases}$$

می‌دانیم اگر $f^{-۱}(\alpha)=\beta$ باشد آنگاه $f(\beta)=\alpha$ است پس:

$$f^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\alpha\to f(\alpha)=-\frac{۱}{۲}$$

$$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۴}\right)=\beta\to f(\beta)=\frac{۱}{۴}$$

از آن جایی که $۲^{x+۱}$ نمی‌تواند عددی منفی باشد پس برای $f(\alpha)=-\frac{۱}{۲}$ از ضابطه پایین استفاده می‌کنیم و برای $f(\beta)=\frac{۱}{۴}$ هر دو ضابطه ممکن است، بنابراین:

$$f(\alpha)=-\frac{۱}{۲}\to ۱-\sqrt{\alpha+۳}=-\frac{۱}{۲}\to -\sqrt{\alpha+۳}=-\frac{۳}{۲}\to\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

$$f(\beta)=\frac{۱}{۴}\begin{cases}x\ge ۲\cup x\le -۲\to ۲^{\beta+۱}=\frac{۱}{۴}=۲^{-۲}\to\beta=-۳\checkmark\\ -۲<x<۲\to ۱-\sqrt{\beta+۳}=\frac{۱}{۴}\to\sqrt{\beta+۳}=\frac{۳}{۴}\to\beta=-\frac{۳۹}{۱۶}\times\end{cases}$$

در نتیجه:

$$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۴}\right)\times f^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\beta\times\alpha=(-۳)\left(-\frac{۳}{۴}\right)=\frac{۹}{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۹ تابع $f(x)$ تابعی یک به یک و وارون‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$f(x)=x\sqrt{x}+۲\xrightarrow{x\geq ۰}x\sqrt{x}\geq ۰\rightarrow x\sqrt{x}+۲\geq ۲\rightarrow f(x)\geq ۲$$

با توجه به این که برد f، دامنهٔ $f^{-۱}$ است، پس $D_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$ و $a=۲$.

$$y=x\sqrt{x}+۲\rightarrow y-۲=x\sqrt{x}\xrightarrow{\text{توان }۲}(y-۲)^{۲}=x^{۳}\rightarrow x=\sqrt[۳]{(y-۲)^{۲}}\rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}},x\geq ۲$$

پس $g(x)=(x-۲)^{۲}$ است.

$$y=\frac{a}{۲}x+\sqrt{g(x)}=\frac{۲}{۲}x+\sqrt{(x-۲)^{۲}}=x+|x-۲|$$

$$\rightarrow y=x+|x-۲|=\begin{cases}۲x-۲ & ;x\geq ۲ \quad \text{تابع اکیداً صعودی}\\ ۲ & ;x<۲ \quad \text{تابع ثابت}\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ وارون تابع در بازه ای که اکیداً صعودی برابر است با:

$$y=۲x-۲,x\geq ۲\rightarrow\begin{cases}x\geq ۲\rightarrow ۲x\geq ۴\rightarrow ۲x-۲\geq ۲\rightarrow y\geq ۲\xrightarrow{\text{دامنه وارون}}x\geq ۲\\ y+۲=۲x\rightarrow x=\frac{y}{۲}+۱\xrightarrow{x,y\text{ تعویض}}y=\frac{x}{۲}+۱,x\geq ۲\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ وارون تابع به‌صورت زیر است:

$$y=\frac{x}{۲}+۱,x\geq ۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۰ **سرنخ** با توجه به ضابطهٔ توابع داده شده می‌توان گفت f تابعی خطی و g تابعی از درجه دوم است.

پله اول: ترکیب $f(x)$ با خودش، تابعی درجه یک است، بنابراین $f(x)$ نیز درجه یک بوده است. پس داریم:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow f(f(x))=a(ax+b)+b$$

$$fof(x)=a^{۲}x+ab+b=۴x-۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^{۲}=۴\Rightarrow a=\pm ۲\\ ab+b=-۳\end{cases}$$

پله دوم: صورت سوال max تابع $g(x)$ را خواسته و fog نیز از درجه ۲ است. پس $g(x)$ یک سهمی رو به پایین است. بنابراین شیب $f(x)$ یعنی a باید منفی باشد، در اینصورت $a=-۲$ قابل قبول است.

$$a=-۲\Rightarrow -۲b+b=-۳\Rightarrow b=۳$$

$$f(x)=-۲x+۳$$

$$f\big(g(x)\big)=-۲g+۳=x^{۲}-x+۳$$

$$=-۲g=x^{۲}-x\Rightarrow g(x)=\frac{-۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۲}x$$

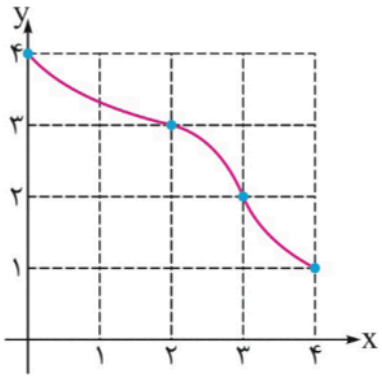
پله سوم:

$$\max_{g(x)}=g(x_s)=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-\left(\frac{۱}{۴}-۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۰)\right)}{۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)}\rightarrow \max_{g(x)}=\frac{\frac{-۱}{۴}}{-۲}=\frac{۱}{۸}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۱ **سرنخ** ابتدا با توجه به اطلاعات داده شده نمودار تقریبی رسم کرده و سپس نامعادله را بررسی کنید.

پله اول: با توجه به این که f تابعی اکیداً نزولی است، نمودار f را به صورت مقابل فرض می‌کنیم:



$$D_f=[0,4] \quad R_f=[1,4] \quad f(2)=3 \quad f^{-1}(2)=3$$

پله دوم:

$$1\le (fof)(x)\le 2 \rightarrow 3\le f(x)\le 4 \rightarrow 0\le x\le 2$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله، شامل ۳ عدد صحیح ۰،۱،۲ می‌باشد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۲ پله اول: عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده و بعد از تجزیه تعیین علامت می‌کنیم:

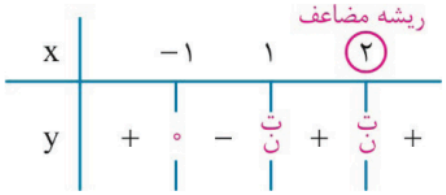
$$\frac{f^2(x)-6f(x)+8}{(x-1)(x-2)}\ge 0 \Rightarrow \frac{(f(x)-2)(f(x)-4)}{(x-1)(x-2)}$$

$$f(x)-2=0 \Rightarrow f(x)=2 \Rightarrow x=-1$$

$$f(x)-4=0 \Rightarrow f(x)=4 \Rightarrow x=2$$

$$(x-1)(x-2)=0 \rightarrow x=1,2$$

پله دوم:



$$D=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)-\{2\}$$

پس دامنه تابع شامل اعداد صحیح $\{0,1,2\}$ نمی‌باشد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۳ **سرنخ** با استفاده از اتحاد مزدوج f(x) را ساده کرده و با تشکیل fog و gof معادله را حل کنید.

$$f(x)=\cos^۴x-\sin^۴x=(\cos^۲x-\sin^۲x)\underbrace{(\cos^۲x+\sin^۲x)}_{۱} \qquad f(x)=\cos^۲x-\sin^۲x=\cos ۲x$$

$$(fog)(x)=\cos ۴x \text{ و } (gof)(x)=۲\cos ۲x$$

$$(fog)(x)-(gof)(x)=\cos^۲x \rightarrow \cos ۴x-۲\cos ۲x=\cos^۲x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

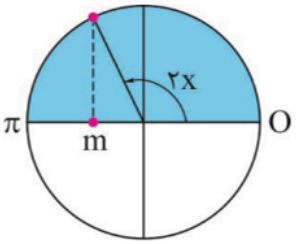
$$۲\cos ۴x-۴\cos ۲x=۱+\cos ۲x$$

$$۲(۲\cos^۲ ۲x-۱)-۵\cos ۲x-۱=۰$$

$$۴\cos^۲ ۲x-۵\cos ۲x-۳=۰ \rightarrow \Delta=۲۵+۴۸=۷۳$$

$$\cos ۲x=\frac{۵\pm\sqrt{۷۳}}{۸} \xrightarrow{-۱\le\cos ۲x\le ۱} \cos ۲x=\frac{۵-\sqrt{۷۳}}{۸}=m$$

$$۰<x<\frac{\pi}{۲} \rightarrow ۰<۲x<\pi$$



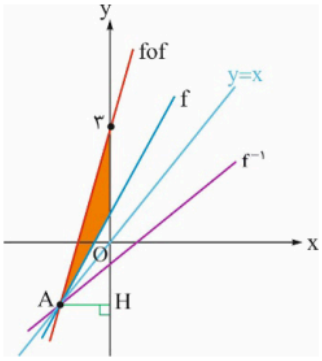
بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ دارای یک جواب است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۴ **سرنخ** با داشتن مساحت و قاعدهٔ مثلث، ارتفاع مثلث را که همان ریشهٔ معادلهٔ $x = f^{-1}(x)$ است، پیدا کنید.

$$f(x)=ax+b \xrightarrow{a,b>0} f(0)=b \qquad (fof)(x)=a^2x+ab+b \qquad (fof)(0)=ab+b=3 \to b=\frac{3}{a+1}$$

نقطهٔ تلاقی f و f^{-1} روی خط $y=x$ است، بنابراین:



$$x=f^{-1}(x)=f(x) \to x=ax+b \to x=\frac{b}{1-a}$$

$$\text{قاعدهٔ مثلث}=(fof)(0)-f(0)=3-b=3-\frac{3}{a+1}=\frac{3a}{a+1}$$

$$\text{ارتفاع مثلث = AH}=\left|\frac{b}{\underbrace{1-a}_{-}}\right|=\frac{-b}{1-a}=\frac{-3}{1-a^2}$$

$$\text{مساحت مثلث}=1=\frac{\left(\frac{3a}{a+1}\right)\left(\frac{-3}{1-a^2}\right)}{2}=\frac{-9a}{2(a+1)(1-a^2)} \to 2(a+1)(1-a^2)=-9a \to 2a^3+2a^2-11a-2=0$$

$$\to (a-2)(2a^2+6a+1)=0 \to \begin{cases} a-2=0 \to a=2 \checkmark \\ 2a^2+6a+1=0 \to \begin{cases} S=-3 \\ P=\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها هم علامت و منفی است}} a<0 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$a=2 \to b=\frac{3}{2+1}=1$$

بنابراین ریشهٔ معادلهٔ $x=f^{-1}(x)$ برابر با $x=\frac{b}{1-a}=\frac{1}{1-2}=-1$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۵

$$y=\sqrt{\sqrt{x}+3} \xrightarrow{\text{انتقال در راستای قائم}} y=\sqrt{\sqrt{x}+3}+k$$

منحنی جدید تابعی اکیدا صعودی است و وارونش را روی خط $y=x$ قطع خواهد کرد. بنابراین نقطهٔ تلاقی دو منحنی $(1,1)$ می‌باشد.

$$y=\sqrt{\sqrt{x}+3}+k \xrightarrow{(1,1)} 1=\sqrt{\sqrt{1}+3}+k \to k=-1$$

$$y=\sqrt{\sqrt{x}+3}-1 \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=1-\sqrt{\sqrt{x}+3}$$

$$\xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{۴ واحد انتقال افقی}} y=1-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}$$

حالا اگر $x=0$ را قرار دهیم $y=1-\sqrt{5}$ می‌شود. پس نقطهٔ $(0,1-\sqrt{5})$ روی نمودار منحنی قرار دارد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۶ تابع $f(x)$ را به‌صورت ترکیب دو تابع $y_1 = x^3 - \sqrt{1-x}$ و $y_2 = 2^x$ در نظر می‌گیریم با توجه به اکیداً صعودی بودن y_1 و y_2 پس ترکیب آن $(f(x))$ اکیداً صعودی است و بر همین اساس تابع $g(x)$ تابعی اکیداً نزولی است.

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 1] \cap [0, +\infty) = [0, 1]$$

$$f - g = 2^{x^3 - \sqrt{1-x}} - 4^{-\sqrt{x}}$$

تابع $f-g$ تابعی اکیداً صعودی است، پس:

$$R_{f-g} = [(f-g)(0), (f-g)(1)] = \left[\frac{1}{2} - 1, 2 - \frac{1}{4}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right]$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۷

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{راست}]{\text{۵واحدبه}} f(x-5) \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{۲واحدبه}} 2 + f(x-5) \xrightarrow[y=x\text{نسبت‌به}]{\text{قرینه}} 5 + f^{-1}(x-2)$$

از آن جایی که نمودار این تابع و خط $y = x + 5$ در نقطه‌ای با طول ۴ متقاطع اند، پس:

$$5 + f^{-1}(x-2) = x + 5 \xrightarrow{x=4} f^{-1}(2) = 4 \Rightarrow f(4) = 2$$

در میان گزینه‌ها فقط در $f(x) = \sqrt{x}$ رابطهٔ $f(4) = 2$ برقرار است.

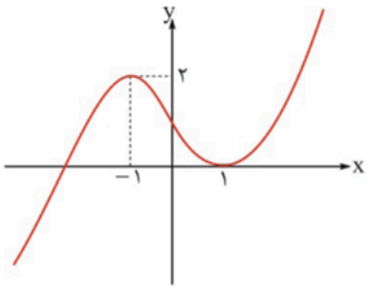
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۸

$$y = (f-g)(x) = x\sqrt{x^2} - 2x + 1 = x|x| - 2x + 1 \qquad y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ;x \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 1 & ;x < 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2 & ;x \geq 0 \\ -2x - 2 & ;x < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اکیدانزولی}} y' < 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - 2 < 0 \rightarrow x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 1 \\ -2x - 2 < 0 \rightarrow x > -1 \xrightarrow{x < 0} -1 < x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\cup} -1 < x < 1$$

با رسم نمودار هم مشخص است که این تابع در بازهٔ $(-1,1)$ اکیدا نزولی است، بنابراین حاصل $b - a = 2$ است.



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۹ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x+۲}{۴}+\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}\rightarrow y=\left(\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\rightarrow \overbrace{\left|\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}+\frac{۱}{۲}\right|}^{+}=\sqrt{y}\rightarrow \frac{\sqrt{x+۱}+۱}{۲}=\sqrt{y}$$

$$\rightarrow \sqrt{x+۱}=۲\sqrt{y}-۱\rightarrow x+۱=(۲\sqrt{y}-۱)^{۲}$$

$$\rightarrow x=(۲\sqrt{y}-۱)^{۲}-۱$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض } x,y} y=(۲\sqrt{x}-۱)^{۲}-۱=۴x-۴\sqrt{x}=۴\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)=b\sqrt{x}(\sqrt{x}-c)$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=۴ \\ c=۱ \end{cases}\rightarrow b+c=۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۰ **پاسخ تشریحی** راه حل اول: **گام اول:** اگر نمودار تابع f را یک واحد به بالا یا یک واحد به پایین انتقال دهیم، به ترتیب نمودار توابع $f(x)+1$ و $f(x)-1$ حاصل می‌شود که در هر دو، قسمتی از نمودار پایین‌تر از محور xها (دارای عرض منفی) خواهد بود، پس توابع $\sqrt{f(x)+1}$ و $\sqrt{f(x)-1}$ در آن نواحی تعریف نخواهند شد، یعنی دامنه‌شان برابر با $\mathbb{R}$ نیست. (رد ۳ و ۴)

گام دوم: هم‌چنین با انتقال نمودار تابع f به اندازهٔ یک واحد به بالا، نمودار تابع $f(x)+1$ حاصل خواهد شد که این تابع نیز محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. یعنی معادلهٔ $f(x)+1=0$ دو ریشه دارد و در نتیجه دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ برابر با $\mathbb{R}$ نیست. (رد ۱)

راه حل دوم: **گام اول:** تابع درجه‌دوم f در $x=3$ و $x=-1$ محور xها را قطع می‌کند، پس ضابطهٔ آن به صورت $y=a(x+1)(x-3)$ است.

هم‌چنین طول رأس تابع $x_{\text{رأس}}=\frac{-1+3}{2}=1$ است.

گام دوم: ضابطهٔ تابع را می‌نویسیم و طول و عرض رأس سهمی را در آن جای‌گذاری می‌کنیم تا a به دست آید:

$$y=a(x+1)(x-3) \xrightarrow[\text{رأس سهمی}]{\text{قراردادن } x \text{ و } y} -2=a(1+1)(1-3) \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-3)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$$

گام سوم: با داشتن ضابطهٔ f گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در توابع کسری ۱ و ۲، اگر مخرج کسر ریشه نداشته باشد، دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است. آن را بررسی می‌کنیم:

۱ مخرج کسر: $f(x)+1=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2} \xrightarrow{\Delta>0}$ مخرج کسر ریشه دارد. $\Rightarrow$ دامنه $\neq \mathbb{R}$

۲ مخرج کسر: $2f(x)+5=2(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2})+5=x^2-2x+2 \xrightarrow{\Delta<0}$ مخرج کسر ریشه ندارد. $\Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}$

۳ عبارت زیر رادیکال در: $f(x)-1\geq 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}-1\geq 0}_{\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}\geq 0} \xrightarrow[\text{منفی است.}]{\text{بین دو ریشه، عبارت}}$ دامنه $\neq \mathbb{R}$

$\Delta>0$: دو ریشه دارد.

۴ عبارت زیر رادیکال در: $f(x)+1\geq 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}+1\geq 0}_{\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\geq 0} \xrightarrow[\text{منفی است.}]{\text{بین دو ریشه، عبارت}}$ دامنه $\neq \mathbb{R}$

$\Delta>0$: دو ریشه دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** توابع f و g خطی هستند و طبق نمودار عرض از مبدأ آن‌ها یکسان است، پس ضابطهٔ آن‌ها را $f(x)=mx+b$ و $g(x)=m'x+b$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم: چون خط‌ها برهم عمود هستند، پس شیب هر یک، قرینه و معکوس دیگری است، در نتیجه $m'=-\frac{۱}{m}$ و $g(x)=\frac{-۱}{m}x+b$ می‌شود.

گام سوم: تابع ثابت $y=(f+۲g)(x)-\frac{۷}{۲}x$ را تشکیل می‌دهیم و در آن ضریب x را صفر قرار می‌دهیم.

$$y=f(x)+۲g(x)-\frac{۷}{۲}x=mx+b+(\frac{-۲}{m})x+۲b-\frac{۷}{۲}x=(\underbrace{m-\frac{۲}{m}-\frac{۷}{۲}}_{\text{ضریب x (زیرا تابع ثابت است.)}=۰})x+۳b$$

$$m-\frac{۲}{m}-\frac{۷}{۲}=۰ \xrightarrow{\times ۲m} ۲m^۲-۷m-۴=۰ \Rightarrow M^۲-۷M-۸=۰$$

$$\Rightarrow (M-۸)(M+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} M=-۱ \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲} \\ M=۸ \Rightarrow m=۴ \end{cases}$$

از آن‌جایی که شیب تابع f مثبت است، فقط مقدار $m=۴$ را قبول می‌کنیم. پس $f(x)=۴x+b$ و $g(x)=-\frac{x}{۴}+b$.

گام چهارم: تابع f از نقطهٔ $(-۸,۰)$ عبور می‌کند، پس: $f(-۸)=۰ \Rightarrow ۴(-۸)+b=۰ \Rightarrow b=۳۲ \ , \ g(x)=-\frac{x}{۴}+۳۲$

گام پنجم: تابع g در $x=a$ محور xها را قطع می‌کند، پس: $-\frac{a}{۴}+۳۲=۰ \Rightarrow a=۱۲۸$

گام ششم: خواستهٔ سؤال $g(-۲a)=g(-۲۵۶)$ است، پس: $g(-۲۵۶)=\frac{۲۵۶}{۴}+۳۲=۶۴+۳۲=۹۶$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ضابطهٔ تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} -x+۴ & x\geq ۰ \ (\text{شیب}=-۱ \ , \ \text{عرض از مبدأ}=۴) \\ ۲x+۴ & x<۰ \ (\text{شیب}=۲ \ , \ \text{عرض از مبدأ}=۴) \end{cases}$$

گام دوم: تابع $y=۲x-f(mx)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y=\begin{cases} ۲x-(-mx+۴)=(۲+m)x-۴ & mx\geq ۰ \\ ۲x-(۲mx+۴)=(۲-۲m)x-۴ & mx<۰ \end{cases}$$

گام سوم: طبق درس‌نامه باید شیب دو خط هم‌علامت باشد.

$$(۲+m)(۲-۲m)>۰ \Rightarrow (۲+m)(۱-m)>۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: ۱ و ۲-}} -۲<m<۱$$

ضمناً با توجه به ضابطهٔ تابع، شرط دوم درس‌نامه نیز برقرار است.

گام چهارم: نتیجه می‌گیریم $-۲<m<۱$ است که در این محدوده ۲ مقدار صحیح برای m موجود است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۳ برای این که $f(x)$ وارون‌پذیر باشد باید نقطهٔ اکسترمم تابع را بیابیم.

$$f'(x)=۱+\frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}=۰\rightarrow\sqrt{۱-x^۲}=+x\rightarrow۱-x^۲=x^۲\rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تنها جواب قابل قبول $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. بنابراین بیشترین مقدار α همان $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

اکنون ضابطهٔ تابع وارون را می‌یابیم.

$$y=x+\sqrt{۱-x^۲}\rightarrow y-x=\sqrt{۱-x^۲}\rightarrow x^۲+y^۲-۲xy=۱-x^۲\rightarrow ۲x^۲-۲yx+y^۲-۱=۰$$

با حل معادلهٔ درجهٔ دوم بالا، مقدار x را می‌یابیم.

$$x=\frac{-(-۲y)\pm\sqrt{۴y^۲-۸(y^۲-۱)}}{۲(۲)}=\frac{۲y\pm\sqrt{۸-۴y^۲}}{۴}=\frac{y\pm\sqrt{۲-y^۲}}{۲}$$

با توجّه به محدودهٔ x می‌توان $x=\frac{y-\sqrt{۲-y^۲}}{۲}$ را در نظر گرفت.

$$f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{-x^۲+۲}}{۲}\rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=-۱\\c=۲\\\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

حداکثر مقدار خواسته شده برابر $\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+۲+۱-۱=۳$ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۴ فرض کنید به‌ازای m و n های صحیح $f(x)=x+m[x]$ و $g(x)=x+n[x]$ آن‌گاه:

$$fof(x)=x+m[x]+m[x+m[x]]=x+۲m[x]+m^۲[x]$$

$$gog(x)=x+n[x]+n[x+n[x]]=x+۲n[x]+n^۲[x]$$

این دو تابع مساوی‌اند پس:

$$۲m[x]+m^۲[x]=۲n[x]+n^۲[x]\rightarrow ۲m+m^۲=۲n+n^۲\rightarrow$$

$$m^۲-n^۲=۲(n-m)\rightarrow (m-n)(m+n)=۲(n-m)\rightarrow \begin{cases} n=m \\ \text{یا} \\ m+n=-۲ \end{cases}$$

در این تست:

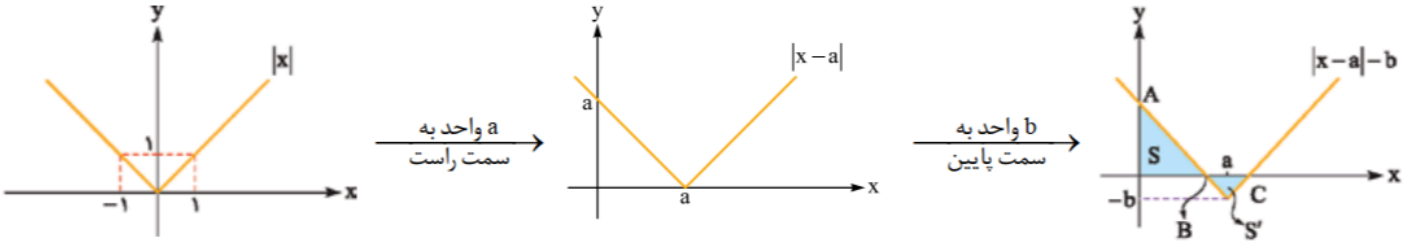
$$k^۲=۳k\rightarrow \begin{cases} k=۰ \\ k=+۳ \end{cases}$$

$$k^۲+۳k=-۲\rightarrow k^۲+۳k+۲=۰\rightarrow \begin{cases} k=-۱ \\ k=-۲ \end{cases}$$

مجموع همهٔ مقادیر قابل قبول صفر است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** نمودار تابع $f(x)=|x-a|-b$ را با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=|x|$ رسم می‌کنیم. (دقت کنید که با توجه به گزینه‌ها، $\frac{a}{b}>۱$ و در نتیجه $a>b$ است. در رسم شکل تابع f این را در نظر می‌گیریم.)



گام دوم: مطابق شکل، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار f و هر دو محور مختصات برابر با S و مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار f و محور xها برابر با S' است. طبق صورت سؤال $S=۸S'$ است.

گام سوم: برای محاسبهٔ S و S'، طول نقاط B و C و عرض نقطهٔ A را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=|x-a|-b \xrightarrow[\text{نقطهٔ A}]{x=۰} y_A=|۰-a|-b \xrightarrow{a>۰} y_A=a-b$$

$$\xrightarrow[\text{C, B نقاط}]{f(x)=۰} ۰=|x-a|-b \Rightarrow |x-a|=b \Rightarrow \begin{cases} x-a=b \Rightarrow x_C=a+b \\ x-a=-b \Rightarrow x_B=a-b \end{cases}$$

گام چهارم: با توجه به شکل، مساحت‌های S و S' را به دست آورده و در تساوی $S=۸S'$ قرار می‌دهیم.

$$S=\frac{۱}{۲}(a-b)(a-b)=\frac{(a-b)^۲}{۲},\ S'=\frac{۱}{۲}(a+b-(a-b))\times b=\frac{۱}{۲}\times ۲b\times b=b^۲$$

$$\xrightarrow{S=۸S'} \frac{(a-b)^۲}{۲}=۸b^۲ \Rightarrow (a-b)^۲=۱۶b^۲ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |a-b|=۴|b| \xrightarrow[\text{و طبق گزینه‌ها باید } a>b \text{ باشد.}]{a,b>۰} a-b=۴b$$

$$\Rightarrow a=۵b \Rightarrow \frac{a}{b}=۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۶ **پاسخ تشریحی**

گام اول: ضابطهٔ بالایی تابع f، یعنی $y = x + ۳; x < ۰$ یک تابع اکیداً صعودی است. چون f به ازای $x < ۰$ اکیداً صعودی است؛ پس باید برای $x \geq ۰$ هم اکیداً صعودی باشد تا تابع f اکیداً یکنوا شود.

گام دوم: طبق صورت سؤال، تابع g خطی است، ضابطهٔ آن را $g(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم و تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x + ۳ & ; x < ۰ \\ ax + b + \underbrace{(x-۱)^۲}_{x^۲-۲x+۱} = x^۲ + (a-۲)x + b + ۱ & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

گام سوم: برای این‌که تابع $y = x^۲ + (a-۲)x + b + ۱$ با دامنهٔ $x \geq ۰$، اکیداً صعودی باشد، باید طول رأس آن کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد. (چون در رأس سهمی، جهت یکنوایی عوض می‌شود.)

$$x_S \leq ۰ \xrightarrow{x_S = \frac{-B}{۲A}} -\frac{(a-۲)}{۲} \leq ۰ \Rightarrow a - ۲ \geq ۰ \Rightarrow a \geq ۲$$

پس در تابع $g(x) = ax + b$، $a \geq ۲$ است؛ در نتیجه ۴ رد می‌شود.

گام چهارم: برای آن‌که تابع f اکیداً صعودی باشد باید «مقدار ضابطهٔ پایینی در $x = ۰$» بزرگ‌تر یا مساوی «مقدار ضابطهٔ بالایی در $x = ۰$» باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x + ۳ & ; x < ۰ \\ x^۲ + (a-۲)x + b + ۱ & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=۰} ۰ + ۳ \leq (۰)^۲ + (a-۲)(۰) + b + ۱ \Rightarrow ۳ \leq b + ۱ \Rightarrow ۲ \leq b$$

پس در تابع $g(x) = ax + b$، $b \geq ۲$ است؛ در نتیجه ۱ و ۳ رد می‌شوند و جواب ۲ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۷ **پاسخ تشریحی**

گام اول: تابع درجه‌دوم با دامنهٔ $\mathbb{R}$ نمی‌تواند اکیداً نزولی باشد، زیرا جهت یکنوایی این تابع در رأس آن تغییر می‌کند؛ پس باید ضریب $x^۲$ صفر باشد.

$$f(x) = \underbrace{(a^۲-۴)}_{\text{صفر}}x^۲ + ax + ۱ \Rightarrow a^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$$

گام دوم: از طرفی تابع خطی $f(x) = ax + ۱$ با شرط $a < ۰$، اکیداً نزولی است؛ پس فقط مقدار $a = -۲$ قابل قبول است.

$$f(x) = \underbrace{-۲x + ۱}_{\text{تابع اکیداً نزولی است.}}$$

گام سوم: طبق درس‌نامه، تابع گویای $g(x) = \frac{۲x - ۵}{bx + ۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ نمی‌تواند اکیداً صعودی باشد؛ درنتیجه باید ضریب x در مخرج کسر صفر باشد.

$$g(x) = \frac{۲x - ۵}{\underbrace{b}_{\text{صفر}}x + ۱} \Rightarrow g(x) = \underbrace{۲x - ۵}_{\substack{\text{تابع اکیداً صعودی است.} \\ \text{(شیب} > ۰ \text{است)}}}$$

گام چهارم: تابع $f + g$ را تشکیل می‌دهیم.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -۲x + ۱ + ۲x - ۵ = -۴ \Rightarrow (f+g)(x) = -۴ \Rightarrow$$ تابع ثابت است.

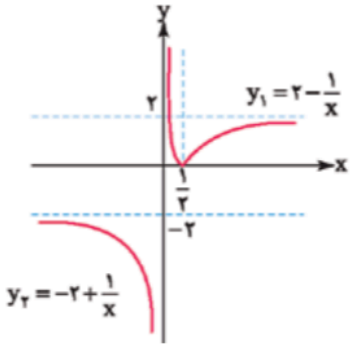
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۸ **پاسخ تشریحی**

گام اول: با تعیین علامت، قدرمطلق را برمی‌داریم و تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\frac{|۲x-۱|}{x}=\begin{cases}\frac{۲x-۱}{x}=۲-\frac{۱}{x} & x\geq\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱-۲x}{x}=-۲+\frac{۱}{x} & x<\frac{۱}{۲},\ x\neq۰\end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



گام سوم: اگر شیب خط $y=mx$ منفی باشد، تابع را در ۳ نقطه قطع نمی‌کند (رد ۴). سایر گزینه‌ها تابع $y_۲$ را در دو نقطه قطع می‌کنند، اگر تابع $y_۱$ را نیز در یک نقطه قطع کنند، تعداد نقاط مشترک ۳ خواهد بود. معادلهٔ تقاطع آن‌ها را با $y_۱$ بررسی می‌کنیم:

$$y_۱=mx\Rightarrow ۲-\frac{۱}{x}=mx\xrightarrow{\times x}۲x-۱=mx^۲$$

$$\Rightarrow mx^۲-۲x+۱=۰\xrightarrow{\text{باید یک ریشه داشته باشد.}}\Delta=۰\Rightarrow ۴-۴m=۰\Rightarrow m=۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۹ **پاسخ تشریحی**

گام اول: از ضابطهٔ توابع f و gof، ضابطهٔ تابع g را به دست می‌آوریم. توجه کنید که $(gof)(x)$ همان $g(f(x))$ است.

$$g(f(x))=۹x^۲+۱۲x-۵\xrightarrow{f(x)=۳x-۱}g(۳x-۱)=\underbrace{۹x^۲+۱۲x-۵}_{(۳x)^۲+۴(۳x)-۵}\Rightarrow g(۳x-۱)=\overbrace{(۳x+۵)(۳x-۱)}^{۳x-۱+۶}$$
$$(۳x+۵)(۳x-۱)$$

گام دوم: با فرض $t=۳x-۱$، عبارت به‌دست‌آمده در گام اول را برحسب t می‌نویسیم.

$$g(t)=\overbrace{(t+۶)(t)}^{t^۲+۶t}\Rightarrow g(x)=x^۲+۶x$$

گام سوم: تابع fog را تشکیل می‌دهیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))\overset{f(x)=۳x-۱}{=\!=}۳g(x)-۱\overset{g(x)=x^۲+۶x}{=\!=}۳(x^۲+۶x)-۱\Rightarrow(fog)(x)=۳x^۲+۱۸x-۱$$

گام چهارم: وقتی نمودار تابع را به موازات محور طول‌ها یک واحد به چپ منتقل کنیم، در ضابطهٔ آن به جای x باید $x+۱$ بگذاریم.

$$\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{یک واحد به سمت چپ}}y=۳\underbrace{(x+۱)^۲}_{x^۲+۲x+۱}+۱۸(x+۱)-۱\Rightarrow y=۳x^۲+۲۴x+۲۰\ (۱)$$

گام پنجم: به تابع درجه‌دوم با ضابطهٔ (۱) رسیدیم. این تابع در بازه‌ای که شامل طول رأس سهمی باشد، یک‌به‌یک نیست (البته تابع در بازه‌هایی که طول رأس سهمی در ابتدا و انتهای بازه باشد نیز یک‌به‌یک است). طول رأس را پیدا می‌کنیم.

$$x_s=\frac{-b}{۲a}=-\frac{۲۴}{۲\times۳}=-۴$$

بازه‌ای را انتخاب می‌کنیم که $x_s=-۴$ در آن باشد، ولی ابتدا یا انتهای بازه نباشد، جواب ۴ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۰ پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا توجه کنید که می‌توانیم عدد صحیح را از داخل جزء صحیح خارج کنیم؛ پس ضابطهٔ تابع f به صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=[x]+[-x]-۳$$

گام دوم: تابع fog را تشکیل می‌دهیم.

$$(fog)(x)=f(g(x)) \xrightarrow{f(x)=[x]+[-x]-۳} (fog)(x)=[g(x)]+[-g(x)]-۳$$

گام سوم: طبق نکتهٔ دوم ضابطهٔ تابع fog به صورت زیر می‌شود.

$$(fog)(x)=\begin{cases} ۰-۳=-۳ \ , \ g(x)\in\mathbb{Z} \\ -۱-۳=-۴ \ , \ g(x)\notin\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{fog برد}=\{-۳,-۴\}$$

گام چهارم: تابع gof را تشکیل می‌دهیم.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g([x]+[-x]-۳) \xrightarrow{g(x)=a+|x|} (gof)(x)=a+\left|[x]+[-x]-۳\right|$$

گام پنجم: طبق نکته، ضابطهٔ تابع gof به صورت زیر می‌شود.

$$(gof)(x)=\begin{cases} a+|۰-۳|=a+۳ \ , & x\in\mathbb{Z} \\ a+|-۱-۳|=a+۴ \ , & x\notin\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{gof برد}=\{a+۴,a+۳\}$$

گام ششم: از تساوی برد دو تابع fog و gof نتیجه می‌گیریم:

$$a+۴=-۳ \Rightarrow a=-۷$$

گام هفتم: خواستهٔ سؤال $\left[\frac{a}{۲}\right]$ است.

$$\left[\frac{a}{۲}\right]=\left[-\frac{۷}{۲}\right]=[-۳/۵]=-۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا دامنهٔ تابع f و سپس دامنهٔ تابع fof را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=b+\sqrt{a-x}$$

$$f \text{ دامنهٔ}: a-x\geq 0 \Rightarrow x\leq a$$

$$fof \text{ دامنهٔ}: D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\} \Rightarrow D_{fof}=\{x\leq a \mid \underbrace{f(x)\leq a}_{b+\sqrt{a-x}\leq a\ (*)}\}$$

باید نامنفی باشد.

$$(*): b+\sqrt{a-x}\leq a \Rightarrow \sqrt{a-x}\leq \overbrace{a-b} \xrightarrow[a\geq b]{\text{توان ۲}} a-x\leq (a-b)^2 \Rightarrow a-(a-b)^2\leq x$$

$$\Rightarrow D_{fof}=\left[a-(a-b)^2, a\right] \quad (a\geq b)$$

گام دوم: از مقایسهٔ D_{fof} با بازهٔ $[-1,3]$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} a=3 \\ a-(a-b)^2=-1 \end{cases} \xrightarrow{a=3} 3-(3-b)^2=-1 \Rightarrow (3-b)^2=4 \Rightarrow 3-b=\pm 2 \Rightarrow b=3\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} b=5 & \text{غ ق ق} \\ b=1 \end{cases}$$

توجه کنید که طبق شرط $a\geq b$، جواب $b=5$ قابل قبول نیست؛ پس $a=3$ و $b=1$ و در نتیجه:

$$f(x)=1+\sqrt{3-x}$$

گام سوم: برد تابع $fof=f(f(x))=1+\sqrt{3-f(x)}$ را به دست می‌آوریم.

$$\sqrt{3-x}\geq 0 \xrightarrow{+1} \underbrace{1+\sqrt{3-x}}_{f(x)}\geq 1 \Rightarrow f(x)\geq 1 \xrightarrow{\times(-1)} -f(x)\leq -1 \xrightarrow{+3} 3-f(x)\leq 2$$

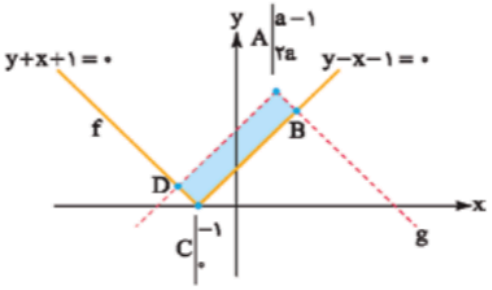
$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} 0\leq \sqrt{3-f(x)}\leq \sqrt{2} \xrightarrow{+1} 1\leq \underbrace{1+\sqrt{3-f(x)}}_{f(f(x))}\leq 1+\sqrt{2} \Rightarrow 1\leq (fof)(x)\leq 1+\sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۲ پاسخ تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ تابع g را با توجه به انتقال‌های گفته‌شده در صورت سؤال به دست می‌آوریم.

$$f(x)=|x+1| \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-|x+1| \xrightarrow[\text{سمت راست}]{a\text{ واحد به}} y=-|(x-a)+1| \xrightarrow[\text{سمت بالا}]{2a\text{ واحد به}} g(x)=-|x-a+1|+2a$$

گام دوم: نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



$$f(x)=|x+1|=\begin{cases} x+1 & ; x\geq -1 \Rightarrow y=x+1 \Rightarrow y-x-1=0 \\ -x-1 & ; x<-1 \Rightarrow y=-x-1 \Rightarrow y+x+1=0 \end{cases}$$

$$g(x)=-|x-a+1|+2a=\begin{cases} -x+a-1+2a=-x+3a-1 & ; x\geq a-1 \\ x-a+1+2a=x+a+1 & ; x<a-1 \end{cases}$$

گام سوم: برای محاسبهٔ مساحت مستطیل رنگی، ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix} a-1 \\ 2a \end{vmatrix}$ از دو خط $y-x-1=0$ و $y+x+1=0$، یعنی عرض و طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$\overline{AB}=\frac{|2a-(a-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{2}} \overset{a>0}{=\!=} \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{AD}=\frac{|2a+a-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|3a|}{\sqrt{2}} \overset{a>0}{=\!=} \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

گام چهارم: مساحت مستطیل را نوشته و آن را برابر با ۴/۵ قرار می‌دهیم.

$$\text{مساحت مستطیل}=\overline{AB}\times\overline{AD} \Rightarrow 4/5=\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{3a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{3a^2}{2}=\frac{9}{2} \Rightarrow a^2=3 \xrightarrow{a>0} a=\sqrt{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

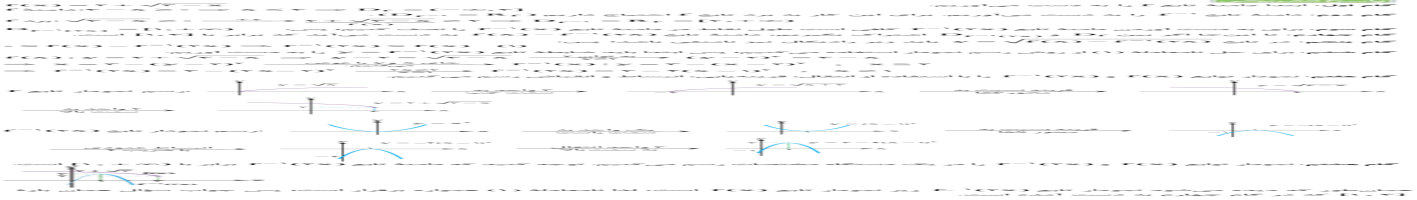
۱۱۳ پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که تساوی $(fo\frac{1}{f})(x)=(\frac{1}{g}of^{-1})(x)$ به ازای هر x از دامنهٔ مشترک توابع طرفین تساوی برقرار است، باید x را به گونه‌ای انتخاب و جای‌گذاری کنیم که نهایتاً به خواستهٔ سؤال یعنی $g(-1)$ برسیم. با توجه به این‌که تابع g در سمت راست تساوی است، باید ببینیم ورودی f^{-1} چه‌قدر باشد تا خروجی آن ۱− شود و در تابع g قرار گیرد.

$$x=-1 \xrightarrow{f} f(-1)=2 \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(2)}_{\text{x ورودی به تساوی}}=-1 \xrightarrow{\frac{1}{g}} \frac{1}{g}(f^{-1}(2))=\frac{1}{g}(-1)=\frac{1}{g(-1)}$$

گام دوم: پس در تساوی $(fo\frac{1}{f})(x)=(\frac{1}{g}of^{-1})(x)$ مقدار x را برابر با ۲ قرار می‌دهیم.

$$f(\frac{1}{f}(2))=\underbrace{\frac{1}{g}\underbrace{(f^{-1}(2))}_{-1}}_{\frac{1}{g(-1)}} \Rightarrow \frac{1}{g(-1)}=f(\frac{1}{f(2)}) \xrightarrow{f(2)=1} \frac{1}{g(-1)}=f(1) \xrightarrow{f(1)=4} g(-1)=\frac{1}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)



(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

@LoPRax_KonKour

۱۱۵ ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را به دست می‌آوریم:

$$x \le ۴ \ , \ ۲-\sqrt{۴-x} \ge ۰ \Rightarrow \sqrt{۴-x} \le ۲ \Rightarrow x \ge ۰$$
$$D_f = [۰,۴]$$

با توجه به اینکه تابع نزولی اکید است، پس: $R_f = \left[-\sqrt{۲},۰\right]$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۱۶ حال به ترتیب داریم:

$$fogof^{-۱}(x) < ۳ = f(۰)$$

f نزولی اکید است.

$$f(gof^{-۱}(x)) < f(۰) \Rightarrow gof^{-۱}(x) > ۰ = g(۵)$$

g نزولی اکید است.

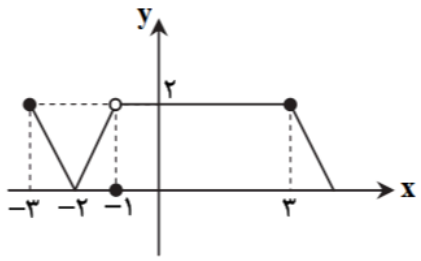
$$f^{-۱}(x) < ۵ = f^{-۱}(۰)$$

$f^{-۱}$ نزولی اکید است. $x > ۰$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۱۷ نکته: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را می‌یابیم:



$$D_f = [-۳,+\infty)$$
$$g(x) = \sqrt{۸-x} \Rightarrow ۸-x \ge ۰ \Rightarrow x \le ۸ \Rightarrow D_g = (-\infty,۸]$$
$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)-۲} \Rightarrow D_h = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x)-۲ = ۰\} \quad (۱)$$
$$D_f \cap D_g == [-۳,+\infty) \cap (-\infty,۸] = [-۳,۸] \quad (۲)$$
$$f(x)-۲ = ۰ \Rightarrow f(x) = ۲ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} x = -۳ \ , \ -۱ < x \le ۳ \quad (۳)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم: $D_h = (-۳,۸] - (-۱,۳] = (-۳,-۱] \cup (۳,۸]$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

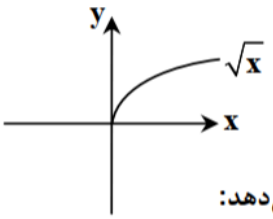
۱۱۸ **نکته: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌مرتب‌های یک تابع را دامنهٔ آن تابع می‌نامیم.**

نکته: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌های یک تابع را برد آن تابع می‌نامیم.

با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع $(۴ \ , \ -۳)$ و برد آن $[۱ \ , \ ۳] \cup [۰ \ , \ -۱)$ است. بنابراین اعداد صحیح -۱ و -۲ در دامنه وجود دارند، ولی در برد نیستند. پس گزینهٔ ۲ پاسخ است.

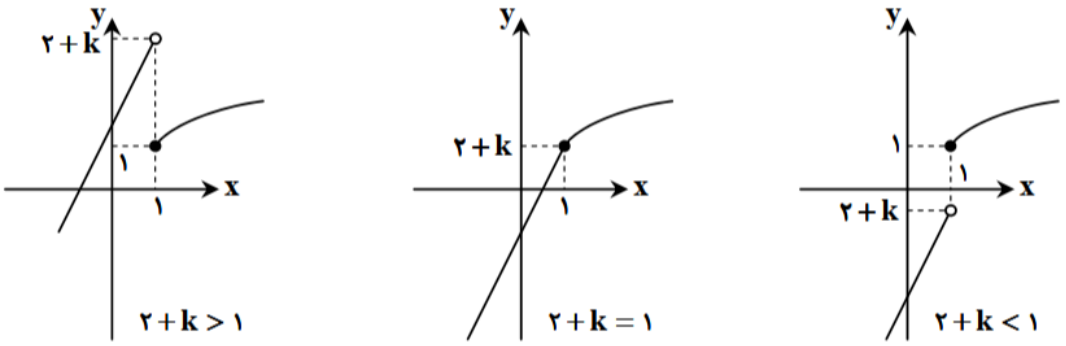
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۱۹ نکته: اگر هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگـاه آن تابع یک‌به‌یک است.



می‌دانیم نمودار $y=\sqrt{x}$ به‌صورت مقابل است.

تابع $y=۲x+k$ یک تابع خطی با شیب مثبت است، با توجه به مقادیر k سه حالت زیر در نمودار تابع رخ می‌دهد:



با توجه به شکل‌های رسم‌شده، فقط حالتی که $۲+k>۱$ باشد، تابع یک‌به‌یک نیست، پس $k>-۱$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۰ نکته: اگر k عدد صحیح باشد، آنگاه $[x+k]=[x]+k$.

نکته: اگر $[x]=k$، آنگاه $k\le x<k+۱$ $(k\in\mathbb{Z})$.

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس می‌تواند از جزءصحیح بیرون بیاید، بنابراین داریم:

$$[x+[x]]=۴ \Rightarrow [x]+[x]=۴ \Rightarrow ۲[x]=۴ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow ۲\le x<۳ \Rightarrow x\in[۲,۳)$$

بنابراین طبق صورت سؤال $a=۲$ و $b=۳$ درنتیجه $۲b-۳a=۶-۶=۰$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

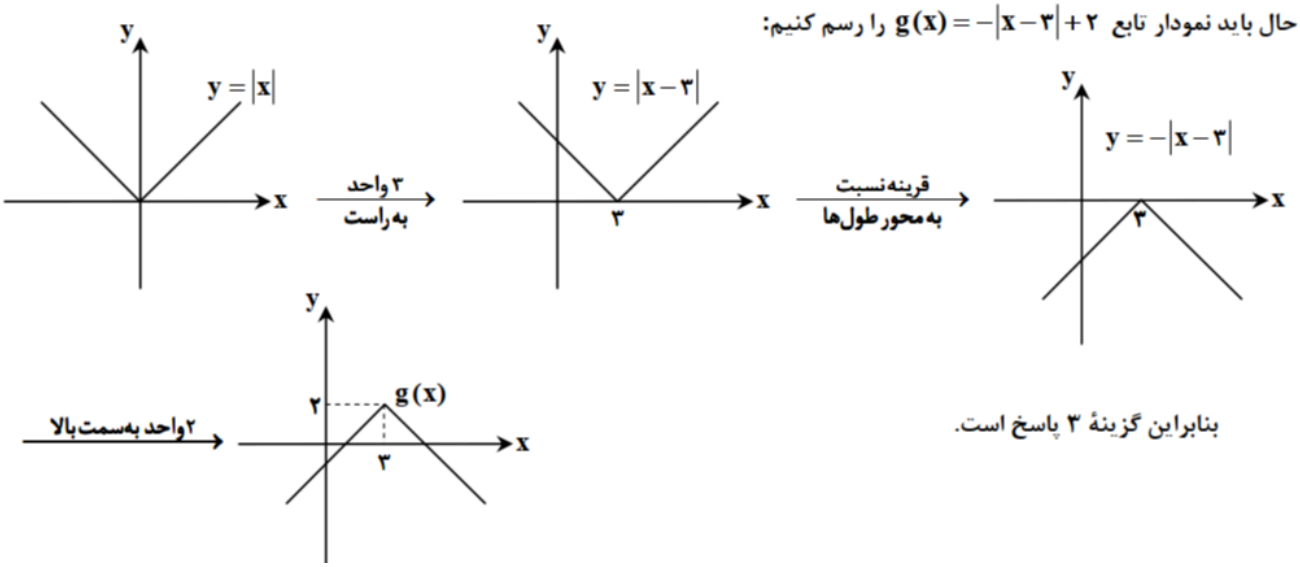
۱۲۱ نکته: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ نمودار تابع $f(x)+k$ با انتقال نمودار $f(x)$ به‌اندازهٔ k واحد در امتداد محور عرض‌ها به‌دست می‌آید و اگر $k>0$، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محورطول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم تابع $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

با توجه به شکل، همان‌طور که مشخص است، نمودار تابع $y=x^2$، ۲ واحد به سمت چپ سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه و ۳ واحد به سمت بالا رفته است. پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=-(x+2)^2+3$ و در نتیجه $a=2$ و $b=3$ است.

حال باید نمودار تابع $g(x)=-|x-3|+2$ را رسم کنیم:

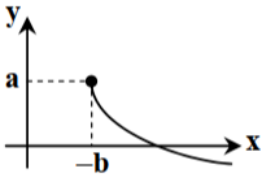


بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۲ نکته: اعدادی که مخرج کسر یک تابع گویا را صفر کنند، عضو دامنهٔ آن تابع نیستند.

با توجه به نمودار تابع $y=a-\sqrt{x+b}$، دامنهٔ آن برابر $D=[-b,+\infty)$ و برد آن برابر $R=(-\infty,a]$ است. پس برای آنکه اشتراک دامنه و برد این تابع فقط شامل یک عدد باشد، باید داشته باشیم: $a=-b$



دامنهٔ تابع گویای $y=\frac{x-1}{ax+b}$ برابر $\mathbb{R}-\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ است.

با توجه به اینکه $-b=a$، دامنهٔ این تابع برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۳ نکته: اگر $k\in\mathbb{Z}$ و $k\le x<k+1$ باشد، آنگاه $[x]=k$ می‌باشد و برعکس.

نکته: اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد و $x\in\mathbb{R}$ داریم: $[x+k]=[x]+k$

نکته: اگر $x\in\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $[x]\in\mathbb{Z}$ می‌باشد.

عبارت $[x+1]$ مقداری صحیح است، پس می‌تواند از داخل جزء صحیح خارج شود، داریم:

$$[x+\underbrace{[x+1]}_{\in\mathbb{Z}}]=5 \Rightarrow [x]+[x+1]=5 \Rightarrow [x]+[x]+1=5 \Rightarrow 2[x]=4 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\le x<3$$

اگر $2\le x<3$ باشد، آنگاه با ضرب طرفین نامساوی در $\frac{5}{2}$ داریم: ۳ مقدار مختلف دارد.

$$5\le\frac{5}{2}x<\frac{15}{2} \Rightarrow \left[\frac{5}{2}x\right]=\{7,6,5\} \Rightarrow$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۴ ابتدا دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم: $\frac{۴}{x}-۲\geq ۰ \Rightarrow \frac{۴-۲x}{x}\geq ۰ \Rightarrow x\in(۰,۲]$

حال با این شرط ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=۲x\sqrt{\frac{۴}{x}-۲}=\sqrt{۴x^۲(\frac{۴}{x}-۲)} \Rightarrow f(x)=\sqrt{۱۶x-۸x^۲}$$

برای عبارت زیر رادیکال داریم: $y=۱۶x-۸x^۲ \quad , \quad ۰<x\leq ۲$

با توجه به نمودار داریم: $۰\leq ۱۶x-۸x^۲\leq ۸ \Rightarrow ۰\leq f(x)\leq \sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

پس $R_f=[۰,۲\sqrt{۲}]$ و در برد تابع فقط ۳ عدد صحیح ۲، ۱ و ۰ قرار گرفته‌اند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۵ نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع f که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱)>f(x_۲)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

ابتدا ثابت می‌کنیم که تابع f تابعی اکیداً نزولی است. با فرض $x_۱<x_۲$ داریم:

$$\begin{cases} x_۱<x_۲ \Rightarrow x_۱^۳<x_۲^۳ \Rightarrow -x_۲^۳<-x_۱^۳ \\ \qquad\qquad \Rightarrow -x_۲^۳-۲x_۲<-x_۱^۳-۲x_۱ \Rightarrow -x_۲^۳-۲x_۲+۱۵<-x_۱^۳-۲x_۱+۱۵ \Rightarrow f(x_۲)<f(x_۱) \\ x_۱<x_۲ \Rightarrow ۲x_۱<۲x_۲ \Rightarrow -۲x_۲<-۲x_۱ \end{cases}$$

بنابراین f تابعی اکیداً نزولی است. اکنون داریم:

$$f(f(x))<f(-۱۲-۲x) \Rightarrow f(-x^۳-۲x+۱۵)<f(-۱۲-۲x) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} -x^۳-۲x+۱۵>-۱۲-۲x$$
$$\Rightarrow -x^۳>-۲۷ \Rightarrow x^۳<۲۷ \Rightarrow x<۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۶ نکته: ممکن است تابعی در یک بازه اکیداً صعودی و در بازهٔ دیگر اکیداً نزولی باشد.

نکته: $(a\pm b)^۳=a^۳\pm ۳a^۲b+۳ab^۲\pm b^۳$

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=(x+۲)^۳-(x-۱)^۳=(x^۳+۳\times x^۲\times ۲+۳\times x\times ۲^۲+۸)-(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)$$
$$=(x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸)-(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)=۹x^۲+۹x+۹$$

بنابراین تابع موردنظر یک تابع درجه دوم است که نمودار آن یک سهمی رو به بالاست. این سهمی در فاصلهٔ $(-\infty,\frac{-b}{۲a})$ یعنی تا قبل از رأس سهمی اکیداً نزولی است. پس حداکثر مقدار k که برابر طول رأس سهمی است، برابر است با: $\max(k)=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۹}{۲\times ۹}=-\frac{۱}{۲}=-۰/۵$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۷ نکته: اگر تابع f بر روی مجموعهٔ $A\subseteq D_f$ اکیداً صعودی باشد و $f(x_۱)\leq f(x_۲)$، آنگاه $x_۱\leq x_۲$ خواهد بود.

برای تعیین دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$g(x)=\sqrt{-f^۲(x)+۴f(x)+۲۱} \Rightarrow -f^۲(x)+۴f(x)+۲۱\geq ۰$$
$$\Rightarrow f^۲(x)-۴f(x)-۲۱\leq ۰ \Rightarrow (f(x)-۷)(f(x)+۳)\leq ۰ \Rightarrow -۳\leq f(x)\leq ۷$$

تابع f از نقاط $A(-۲,-۳)$ و $B(۵,۷)$ می‌گذرد؛ یعنی $f(-۲)=-۳$ و $f(۵)=۷$، پس:

$$-۳\leq f(x)\leq ۷ \Rightarrow f(-۲)\leq f(x)\leq f(۵) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} -۲\leq x\leq ۵ \Rightarrow D_g=[-۲,۵]$$

که شامل ۸ عدد صحیح $-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۸ نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی (اکیداً صعودی) می‌نامیم.

تابع f را به‌صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x) = |2x-6| + ax$$

$$x < 3 \Rightarrow f(x) = -(2x-6) + ax = (a-2)x + 6 \Rightarrow \text{شیب} = a-2$$

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = 2x-6+ax = (a+2)x-6 \Rightarrow \text{شیب} = a+2$$

تابع f بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. برای اینکه تابع f اکیداً یکنوا باشد، باید شیب هر دو ضابطهٔ خطی تابع f هم‌علامت باشند، پس داریم:

$$(a-2)(a+2) > 0 \Rightarrow a^2 - 4 > 0 \Rightarrow a^2 > 4 \Rightarrow |a| > 2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۹ نکته: دامنهٔ توابع گویا به‌صورت $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است.

برای اینکه مخرج فقط یک ریشه داشته باشد، دو حالت امکان‌پذیر است:

الف) Δ برابر صفر باشد. با توجه به اینکه $\Delta = 64$، این حالت امکان‌پذیر نیست.

ب) عبارت درجه یک باشد. برای این منظور باید داشته باشیم: $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

بنابراین ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x) = \sqrt{1-x}$ است که دامنهٔ آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

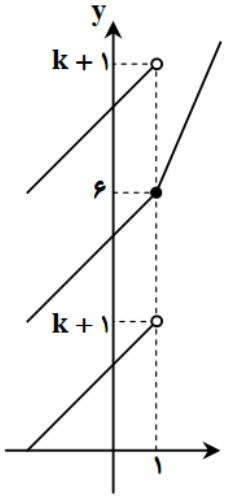
$$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, 1]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۰ نکته: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) می‌نامیم.

نکته: تابعی که اکیداً نزولی یا اکیداً صعودی باشد را تابع اکیداً یکنوا می‌نامیم.

نمودار تابع f را در نظر بگیرید. برای $x < 1$، شیب تابع خطی $y = kx + 1$ باید مثبت باشد تا تابع f اکیداً صعودی شود، زیرا برای $x \geq 1$ نیز تابع خطی $y = 2x + 4$ اکیداً صعودی است.



$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & , \ x \geq 1 \\ kx+1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

از روی شکل مشخص است که باید $k + 1 \leq 6$ باشد تا تابع f اکیداً صعودی شود، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} k+1 \leq 6 \Rightarrow k \leq 5 \\ y = kx+1 \Rightarrow \text{شیب} = k > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k \leq 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۱ نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه تابع f بر روی مجموعهٔ A اکیداً نزولی است.

چون تابع f بر روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(2) = 0$ است، برای $x < 2$ داریم:

$$x < 2 \Rightarrow f(x) > f(2) \Rightarrow f(x) > 0$$

یعنی برای $x < 2$ مقدار تابع f مثبت است و برای $x > 2$ داریم:

$$x > 2 \Rightarrow f(x) < f(2) \Rightarrow f(x) < 0$$

پس برای $x > 2$ مقدار تابع f منفی است. حال نامعادلهٔ زیر را با تعیین علامت حل می‌کنیم:

$$\frac{f(x)}{x^2 - 8x} \geq 0$$

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 8$$

x	$-\infty$		0		2		8		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x^2 - 8x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{f(x)}{x^2 - 8x}$		$+$	ت ن	$-$	ج	$+$	ت ن	$-$	

$$x < 0 \text{ یا } 2 \leq x < 8 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup [2, 8)$$

اعداد طبیعی دامنه عبارتند از: $2, 3, \cdots, 7$، پس ۶ عدد طبیعی در دامنهٔ تابع g قرار دارند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۲ نکته: نمودار تابع $y = f(kx)$ اگر $0 < k < 1$ باشد، از انبساط افقی نمودار تابع $y = f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای محور xها حاصل می‌شود.

نکته: اگر $a > 0$ باشد، برای رسم $y = f(x+a)$ باید نمودار $y = f(x)$ را a واحد به چپ منتقل کنیم.

نکته: برای رسم $y = -f(x)$، نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

نکته: اگر $a > 0$ باشد، برای رسم $y = f(x) + a$ باید نمودار $y = f(x)$ را a واحد به بالا انتقال دهیم.

طبق نکات بالا، تبدیل‌های گفته‌شده در صورت سؤال را بر روی $f(x) = |x-1|$ اعمال می‌کنیم:

$$f(x) = |x-1| \xrightarrow[\text{انبساط افقی با ضریب ۴}]{x \to \frac{1}{4}x} y = \left|\frac{1}{4}x - 1\right| \xrightarrow[\text{۲ واحد به چپ}]{x \to x+2} y = \left|\frac{1}{4}(x+2) - 1\right|$$

$$y = \left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right| \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right| \xrightarrow{\text{۳ واحد به بالا}} g(x) = -\left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right| + 3$$

حال باید معادلهٔ $f(x) = g(x)$ را حل کنیم:

$$|x-1| = -\left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right| + 3 \Rightarrow |x-1| + \left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right| = 3$$

محدوده‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x < 1 \Rightarrow -(x-1) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 3 \Rightarrow -x + 1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow -\frac{5}{4}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \quad \checkmark$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow x - 1 - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 3 \quad x - 1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow \frac{3}{4}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{14}{3} \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow \frac{5}{4}x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{18}{5} \quad \checkmark$$

مجموع طول نقاط برخورد f و g برابر است با:

$$-\frac{6}{5} + \frac{18}{5} = \frac{12}{5} = 2/4$$

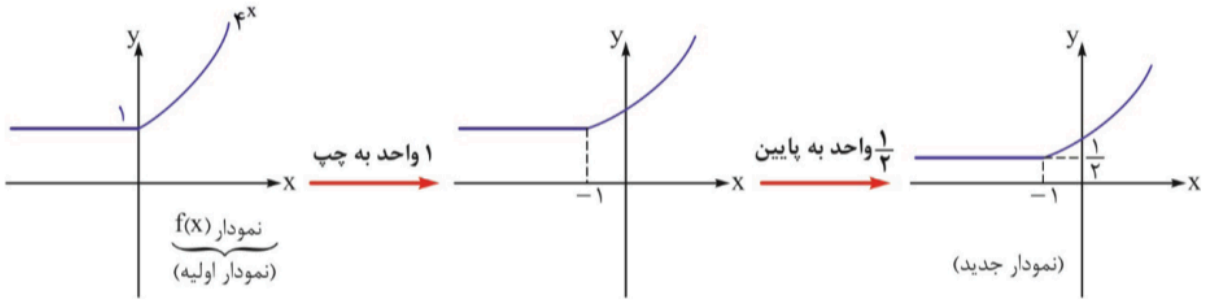
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۳ **سرنخ** دقت به این نکته که با تبدیل x به $x+a$ نمودار به چپ یا راست و با تبدیل $y \to y+b$ نمودار b واحد به بالا یا پایین منتقل می‌شود.

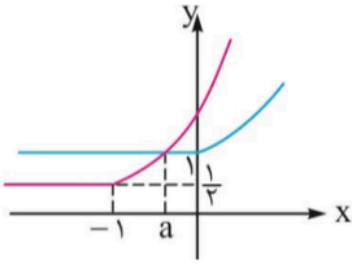
پله اول:

$$f(x)=\begin{cases}۲^{۲x} & x \geq ۰ \\ ۲^{۰} & x<۰\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۴^{x} & x \geq ۰ \\ ۱ & x<۰\end{cases} \xrightarrow[\text{سمت چپ}]{\text{یک واحد به}} (x \to x+۱) \to f(x)=\begin{cases}۴^{x+۱} & x \geq -۱ \\ ۱ & x<-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{سمت پایین}]{\frac{۱}{۲}\text{ واحد به}} \left(y \to y-\frac{۱}{۲}\right) \qquad f(x)=\begin{cases}۴^{x+۱}-\frac{۱}{۲} & x \geq -۱ \\ \frac{۱}{۲} & x<-۱\end{cases}$$



حال برای تشخیص بازهٔ (a,b) نمودار اولیه را با رنگ سبز و نمودار جدید را با رنگ قرمزنشان می‌دهیم.



پله دوم: برای پیدا کردن a، کافی است نقطهٔ تلاقی $y=۴^{x+۱}-\frac{۱}{۲}$ و خط $y=۱$ را پیدا کنیم:

$$۴^{x+۱}-\frac{۱}{۲}=۱ \Rightarrow ۴^{x+۱}=\frac{۳}{۲} \xrightarrow[\text{می‌گیریم } \log_{۴}]{\text{از دو طرف}} \log_{۴}^{۴^{x+۱}}=\log_{۴}^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow x+۱=\log_{۴}^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow x=\log_{۴}^{\frac{۳}{۲}}-۱$$

$$\to x=\log_{۴}^{۳}-\frac{۳}{۲} \to a=\log_{۴}^{۳}-\frac{۳}{۲}$$

با توجه به شکل، نمودار جدید در بازهٔ $(a,+\infty)$ بالاتر از نمودار اولیه قرار دارد. بنابراین کمترین مقدار a برابر است با:

$$a=\log_{۴}^{۳}-\frac{۳}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۴ f تابعی همانی است، بنابراین:

$$y=\frac{۱}{f}=\frac{۱}{x}\xrightarrow[x\to x-a]{\text{a واحد در جهت مثبت محور x ها}}y=\frac{۱}{x-a}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}y=\frac{-۱}{x-a}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت منفی محور y ها}}y=\frac{-۱}{x-a}-۲$$

حال منحنی جدید را با تابع $f(x)=x$ تلاقی می‌دهیم:

$$\frac{-۱}{x-a}-۲=x\to\frac{-۱}{x-a}=x+۲\to(x+۲)(x-a)=-۱\to x^۲+(۲-a)x+۱-۲a=۰\qquad(۱)$$

می‌دانیم مختصات نقطه تلاقی به‌صورت (α,α) است که فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{\alpha^۲+\alpha^۲}=\sqrt{۲}|\alpha|$ است. بنابراین:

$$\sqrt{۲}|\alpha|=\sqrt{۲}\to|\alpha|=۱\to\alpha=\pm۱$$

طول نقطهٔ برخورد در معادلهٔ تلاقی صدق می‌کند، پس:

$$x^۲+(۲-a)x+۱-۲a=۰\to\begin{cases}x=۱\to ۱+۲-a+۱-۲a=۰\to a=\frac{۴}{۳}&\checkmark\\ x=-۱\to ۱-۲+a+۱-۲a=۰\to a=۰&\times\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۵ باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد:

$$x^۲-x-۲>۰\Rightarrow(x+۱)(x-۲)>۰\Rightarrow\begin{cases}x<-۱\\ \text{یا}\\ x>۲\end{cases}$$

در ضمن عبارت زیر رادیکال $\sqrt{x^۲-۱}$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$x^۲-۱\geq۰\Rightarrow x^۲\geq۱\Rightarrow\begin{cases}x\leq-۱\\ \text{یا}\\ x\geq۱\end{cases}$$

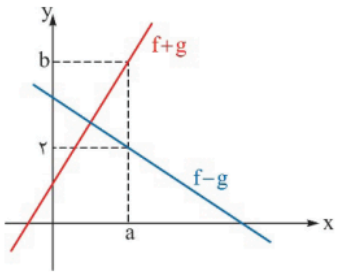
از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می‌گیریم دامنهٔ تابع f عبارت است از: $x>۲$ یا $x<-۱$

عضوهای صحیح مثبت : $۳,۴,۵,\ldots$

عضوهای صحیح منفی : $\ldots,-۴,-۳,-۲$ $\xrightarrow{\text{مجموع}}-۲$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۶ با توجه به شکل، داریم:



$$\begin{cases}(f+g)(a)=b\Rightarrow f(a)+g(a)=b\\ (f-g)(a)=۲\Rightarrow f(a)-g(a)=۲\end{cases}$$

از حل دو معادله و دو مجهول بالا نتیجه می‌گیریم:

$$f(a)g(a)=۸\Rightarrow\frac{b+۲}{۲}\times\frac{b-۲}{۲}=۸\Rightarrow b^۲-۴=۳۲\Rightarrow b^۲=۳۶$$

با توجه به نمودار، $b>۰$ است، پس $b=۶$ قابل قبول است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۷ می‌دانیم $(fof^{-1})(x)=x;x\in R_f$ است. با توجه به این که در تابع $f(x)=1+\sqrt{x}$ بُرد تابع برابر بازهٔ $[1,+\infty)$ است، داریم:

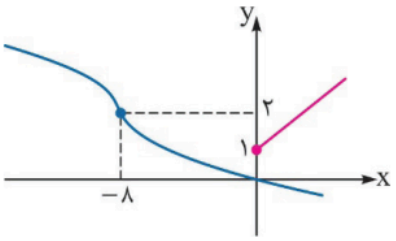
$$(fof^{-1})(x)=x\ ;\ x\geq 1\Rightarrow (fof^{-1})(x+1)=x+1;x\geq 0$$

حالا سراغ تابع g و وارونش می‌رویم:

$$g(x)=-x^3+6x^2-12x=-(x-2)^3-8$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=2-\sqrt[3]{x+8}$$

برای پیدا کردن تعداد نقاط تقاطع، می‌توانیم نمودار این دو تابع را دریک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



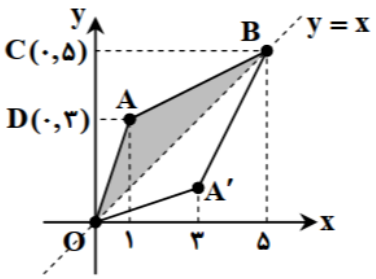
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۸ **نکته: برای رسم نمودار معکوس تابع $y=f(x)$، باید نمودار $f(x)$ را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) قرینه کنیم.**

نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم.

با توجه به شکل، قرینهٔ نقطهٔ O و نقطهٔ B روی خود آن‌ها قرار دارد، چون این دو نقطه روی خط $y=x$ قرار دارند.

نقطهٔ $A(1,3)$ و نقطهٔ قرینهٔ آن $A'(3,1)$ می‌باشد.



$$S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\times OD\times AD=\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}=1/5$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times(BC+AD)\times DC=\frac{1}{2}\times(5+1)\times 2=6$$

$$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\times OC\times BC=\frac{1}{2}\times 5\times 5=\frac{25}{2}=12/5$$

$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}-(S_{\triangle OAD}+S_{ABCD})\Rightarrow S_{\triangle OAB}=12/5-(1/5+6)=5$$

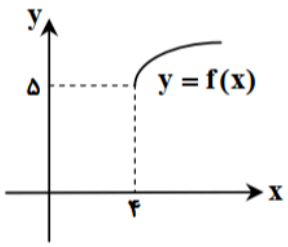
با توجه به تقارن شکل، مساحت چهارضلعی $OABA'$ برابر ۱۰ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۹ نکته: اگر تابع f وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$\begin{cases} f o f^{-1}(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f \\ f^{-1} o f(x) = x \quad ; \quad x \in D_f \end{cases}$$

ابتدا داریم:



$$D_f = [۴, +\infty) \quad , \quad R_f = [۵, +\infty)$$

با توجه به نکتهٔ بالا با شرط $x \geq ۵$ داریم:

$$f o f^{-1}(x) = x$$

و با شرط $x \geq ۴$ داریم:

$$f^{-1} o f(x) = x$$

اشتراک این دو مجموعه به‌صورت $x \geq ۵$ است و باید معادلهٔ زیر را با این شرط حل کنیم:

$$x + ۲x = x^۳ \Rightarrow x^۳ - ۳x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

با توجه به شرط $x \geq ۵$، هیچ‌کدام از این جواب‌ها قابل‌قبول نیستند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۰ نکته $(fog)(x) = f(g(x))$

نکته: $۰ \leq x - [x] < ۱$

تابع gof را محاسبه می‌کنیم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(۲[x] - ۲x + ۱)$$

با فرض $t = ۲[x] - ۲x + ۱$ داریم:

$$g(t) = t^۲ + ۲t + ۲ \quad , \quad ۰ \leq x - [x] < ۱ \Rightarrow ۰ \geq ۲[x] - ۲x > -۲ \Rightarrow -۲ + ۱ < ۲[x] - ۲x + ۱ \leq ۱ \Rightarrow -۱ < t \leq ۱$$

حال برد تابع $g(t)$ را می‌یابیم:

$$g(t) = t^۲ + ۲t + ۱ + ۱ = (t+۱)^۲ + ۱$$

$$-۱ < t \leq ۱ \Rightarrow ۰ < t + ۱ \leq ۲ \Rightarrow ۰ < (t+۱)^۲ \leq ۴ \Rightarrow ۱ < (t+۱)^۲ + ۱ \leq ۵ \Rightarrow ۱ < g(t) \leq ۵ \Rightarrow R_{gof} = (۱, ۵]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

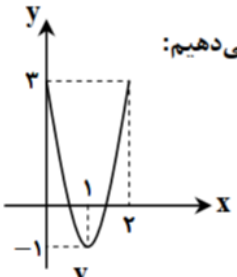
۱۴۱ نکته: برای رسم نمودار $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کرد.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را بر k تقسیم کنیم؛ اگر $k>1$، نمودار در راستای محور xها انقباض می‌یابد و اگر $0<k<1$، نمودار در راستای محور xها انبساط می‌یابد.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد در راستای محور yها انتقال دهیم.

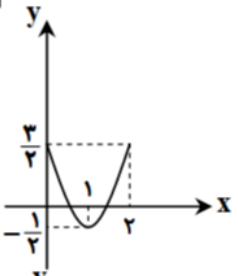
نکته: برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار $y=f(x)$، قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. برای رسم نمودار $y=\left|\frac{1}{2}f(2x)-1\right|$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: $y=f(2x)$, $x\to 2x$



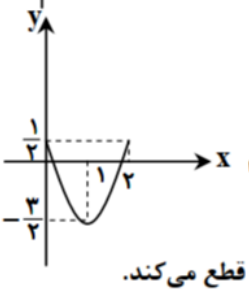
(نمودار در راستای محور xها منقبض شد.)

مرحلهٔ دوم: $y=\frac{1}{2}f(2x)$, $\frac{1}{2}\times f(x)$

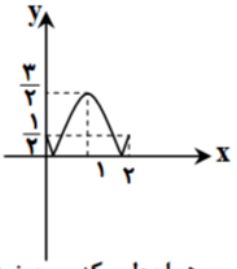


(نمودار در راستای محور yها منقبض شد.)

مرحلهٔ سوم: $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$, $f(x)-1$



مرحلهٔ چهارم: $y=\left|\frac{1}{2}f(x)-1\right|$, $|f(x)|$



همان‌طور که می‌بینید، خط $y=\frac{3}{2}$ نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۲ نکته: با داشتن نمودار $f(x)$ می‌توان نمودار $f(x)+k$ را با انتقال $f(x)$ به‌اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

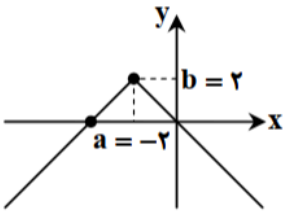
نکته: برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: $\sqrt{a^2}=|a|$

ابتدا ضابطهٔ تابع را کمی ساده می‌کنیم:

$$f(x)=b-\sqrt{(x+2)^2}\Rightarrow f(x)=b-|x+2|$$

پس باید نمودار $-|x|$ را ابتدا دو واحد به‌سمت چپ آورده و سپس به‌اندازهٔ b (با توجه به شکل داده‌شده) به‌سمت بالا انتقال دهیم. تابع از مبدأ می‌گذرد؛ بنابراین:



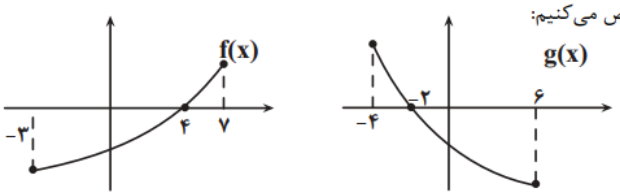
$$f(0)=0\Rightarrow b-|0+2|=0\Rightarrow b=2\ ,\ a=-2$$

$$f(x)=2-|x+2|\Rightarrow f(b)=f(2)\Rightarrow f(2)=2-|2+2|=-2$$

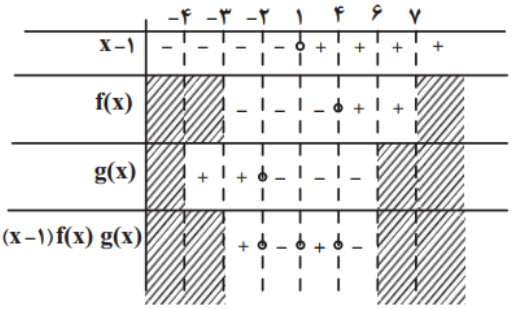
$$f(2)+a=-2-2=-4$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۳ ابتدا وضعیت $f(x)$ و $g(x)$ را نسبت به محور xها (برای بررسی علامت‌ها) مطابق شکل مشخص می‌کنیم:



حال جدول تعیین‌علامت را رسم می‌کنیم:



پس دامنهٔ y برابر است با: $[-3,-2]\cup[1,4]$ که شامل ۶ عدد صحیح است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۴ ابتدا رابطه‌داده شده را رسم می‌کنیم:

$$f(x+1)-f(x)=3f(x)f(x+1)\Rightarrow\frac{+1-}{f(x)f(x+1)}=3\Rightarrow\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x+1)}=3\Rightarrow\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{f(x)}-3$$

با ادامه دادن رابطهٔ بالا داریم:

$$\Rightarrow\frac{1}{f(x+2)}=\frac{1}{f(x+1)}-3=\frac{1}{f(x)}-6\Rightarrow\frac{1}{f(x+k)}=\frac{1}{f(x)}-3k$$

اگر در رابطهٔ بالا قرار دهیم $x=1402$ و $f(x+k)=1$، خواهیم داشت:

$$1=2023-3k\Rightarrow 3k=2022\Rightarrow k=674$$

بنابراین:

$$f(1402+674)=1\Rightarrow f(2076)=1$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۵ **با توجه به نمودار تابع‌ها، دامنهٔ دو تابع به‌صورت $D_f=[-1,1]$ و $D_g=[0,4)$ است. هم‌چنین تابع خطی g از نقاط $(0,2)$ و $(4,0)$ می‌گذرد. پس ضابطهٔ تابع خطی g به‌صورت زیر است:**

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow m=\frac{0-2}{4-0}=-\frac{1}{2}$$

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y-2=-\frac{x}{2}\Rightarrow y=-\frac{x}{2}+2\Rightarrow g(x)=-\frac{x}{2}+2$$

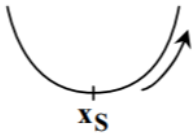
بنابراین دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر است:

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{0\le x<4\mid -1\le -\frac{x}{2}+2\le 1\right\}$$

$$=\left\{0\le x<4\mid -3\le -\frac{x}{2}\le -1\right\}=\left\{0\le x<4\mid 6\ge x\ge 2\right\}=[2,4)$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

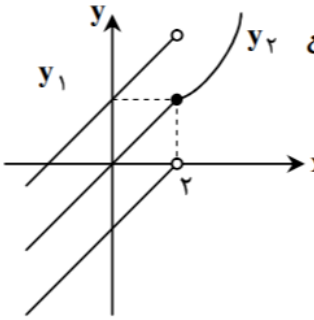
۱۴۶ اگر $y_۱(x)=ax+۲a-۱$ و $y_۲(x)=x^۲-۴ax+۱$ باشند، اولاً باید تابع $y_۱$ در دامنهٔ $x<۲$ و تابع $y_۲$ در دامنهٔ $x\geq ۲$ اکیداً صعودی باشند:



$$y_۱=ax+۲a-۱ \Rightarrow a>۰ \quad (۱)$$

$$y_۲=x^۲-۴ax+۱ \Rightarrow x_S\leq ۲ \Rightarrow \frac{۴a}{۲}\leq ۲ \Rightarrow a\leq ۱ \quad (۲)$$

با رسم یک شکل تقریبی، مشاهده می‌شود باید در $x=۲$ مقدار تابع $y_۱$ بزرگ‌تر از مقدار تابع $y_۲$ نباشد؛ بنابراین:



$$x=۲ \Rightarrow y_۱\leq y_۲$$

$$\Rightarrow ۲a+۲a-۱\leq ۴-۴a(۲)+۱$$

$$\Rightarrow ۱۲a\leq ۶ \Rightarrow a\leq \frac{۱}{۲} \quad (۳)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳) \Rightarrow a\in\left(۰,\frac{۱}{۲}\right]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۷ f تابعی اکیداً نزولی است. ابتدا دامنهٔ توابع f و fof را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲+\sqrt{۴-x} \Rightarrow ۴-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۴ \Rightarrow D_f=(-\infty,۴]$$

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{\underbrace{x\leq ۴}_{(۱)} \mid f(x)\leq ۴\}$$

$$۲+\sqrt{۴-x}\leq ۴ \Rightarrow \sqrt{۴-x}\leq ۲ \Rightarrow ۴-x\leq ۴ \Rightarrow x\geq ۰ \quad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲) \Rightarrow D_{fof}=[۰,۴]$$

حال نامعادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$(fof)(x)\leq f(x) \Rightarrow f(f(x))\leq f(x) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x)\geq x$$

$$\Rightarrow ۲+\sqrt{۴-x}\geq x \Rightarrow \sqrt{۴-x}\geq x-۲$$

برای حل نامعادلهٔ بالا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $x-۲<۰$، یعنی $x<۲$ باشد، نامعادلهٔ بالا همواره برقرار است.

حالت دوم: $x-۲\geq ۰$، یعنی $x\geq ۲$ باشد، داریم:

$$\sqrt{۴-x}\geq x-۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴-x\geq x^۲-۴x+۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x\leq ۰ \xrightarrow[x=۳]{x=۰} ۰\leq x\leq ۳ \xrightarrow{x\geq ۲} ۲\leq x\leq ۳$$

از اجتماع دو حالت بالا، جواب نامعادله به‌صورت $x\leq ۳$ به‌دست می‌آید.

با توجه به دامنهٔ توابع f و fof و جواب به‌دست آمده برای نامعادله، جواب مسئله بازهٔ $[۰,۳]$ است که شامل ۴ عدد صحیح است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۸ نکته: رابطه‌ای که به‌صورت زوج‌مرتب داده شده است، در صورتی تابع است که در آن هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ اول برابر نباشند؛ یعنی اگر مؤلفهٔ اولشان برابر بود، مؤلفهٔ دومشان هم برابر باشد.

$$f=\{(۷,۲n+۱),(-۲۰,۳),(۴,۹),(۴,m^۲),(۸n,۳m),(۷,m-۱)\}$$

$$(۴,۹),(۴,m^۲)\in f \xrightarrow{\text{تابع } f} m^۲=۹ \Rightarrow m=\pm ۳$$

اکنون قابل قبول بودن هریک از این مقادیر را بررسی می‌کنیم:

$$m=-۳ : f=\{(۷,۲n+۱),(-۲۰,۳),(۴,۹),(۸n,-۹),(۷,-۴)\}$$

$$(۷,۲n+۱),(۷,-۴)\in f \xrightarrow{\text{تابع } f} ۲n+۱=-۴ \Rightarrow n=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow f=\{(۷,-۴),(-۲۰,۳),(۴,۹),(-۲۰,-۹)\}$$

چون دو زوج‌مرتب $(-۲۰,۳)$ و $(-۲۰,-۹)$ دارای مؤلفهٔ اول یکسان و مؤلفهٔ دوم متفاوت‌اند، پس $m=-۳$ غیر قابل قبول است.

$$m=۳ : f=\{(۷,۲n+۱),(-۲۰,۳),(۴,۹),(۸n,۹),(۷,۲)\}$$

$$(۷,۲n+۱),(۷,۲)\in f \xrightarrow{\text{تابع } f} ۲n+۱=۲ \Rightarrow n=\frac{۱}{۲} \Rightarrow f=\{(۷,۲),(-۲۰,۳),(۴,۹)\}$$

بنابراین فقط مقادیر $m=۳$ و $n=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است، پس: $\frac{n}{m}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{۱}{۶}$.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۹ نکته: اگر برای $x_۱$ و $x_۲$، از مجموعهٔ D که $x_۲>x_۱$ داشته باشیم $f(x_۲)<f(x_۱)$، تابع f را در D اکیداً نزولی می‌نامیم.

تابع f اکیداً نزولی است، پس از نامساوی $f(x+۱)<f(۳x-۵)$ می‌توان نتیجه گرفت: $x+۱>۳x-۵ \Rightarrow ۲x<۶ \Rightarrow x<۳$ (۱)

از طرفی باید دامنهٔ دو تابع $f(x+۱)$ و $f(۳x-۵)$ را پیدا کرده و با محدودهٔ به‌دست آمده اشتراک بگیریم. زیرا اگر $x+۱$ و $۳x-۵$ در محدودهٔ دامنهٔ f نباشند، نامعادلهٔ داده‌شده بی‌معنی است.

$$x+۱\geq -۲ \Rightarrow x\geq -۳ \quad (۲)$$

$$۳x-۵\geq -۲ \Rightarrow ۳x\geq ۳ \Rightarrow x\geq ۱ \quad (۳)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳) : ۱\leq x<۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۰ نکته: $(fog)(x)=f(g(x))$

چون تابع $g(x)$ خطی است پس می‌توان فرض کرد $g(x)=ax+b$، پس:

$$(fog)(x)=f(g(x))=۲(ax+b)+۱=۲ax+۲b+۱$$

حال با توجه به نمودار $y=\sqrt{(fog)(x)}=\sqrt{۲ax+۲b+۱}$ می‌توان نتیجه گرفت که این تابع در بازهٔ $[x_۰,+\infty)$ تعریف شده که $x_۰$ عددی منفی است، پس داریم:

$$۲ax+۲b+۱ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & x_۰ & \\ \hline ۲ax+۲b+۱ & - & ۰ & + \end{array}$$

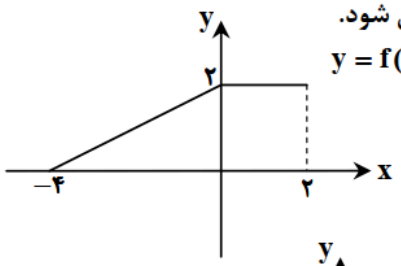
بنابراین $۲a>۰$ یعنی $a>۰$ و ریشهٔ زیر رادیکال یعنی $-\frac{۲b+۱}{۲a}$ منفی است، پس با توجه به مثبت بودن $۲a$ داریم: $۲b+۱>۰$؛ درنتیجه $b>-\frac{۱}{۲}$، که این شرایط فقط در گزینهٔ ۴ رخ داده است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

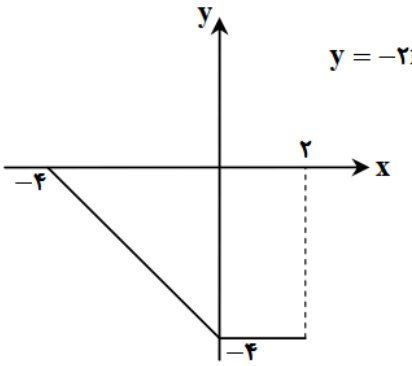
۱۵۱ نکته: برای رسم نمودار $y=f(kx)$، در تابع $y=f(x)$ بدون تغییر عرض نقاط، طول نقاط را در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌کنیم.

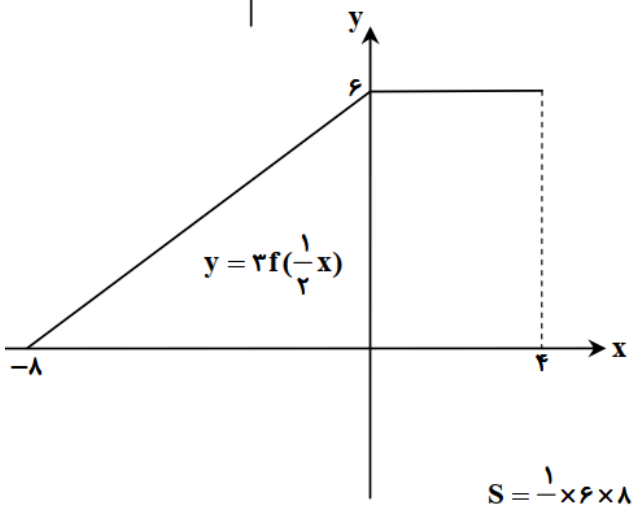
نکته: برای رسم نمودار $y=kf(x)$، در تابع $y=f(x)$ بدون تغییر طول نقاط، عرض نقاط را در k ضرب می‌کنیم.

چون نمودار $y=f(-۲x)$ را داریم، طول نقاط را در -۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار $y=f(x)$ حاصل شود.



حال نمودار توابع $y=-۲f(x)$ و $y=۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم می‌کنیم:





با توجه به تعریف تابع g، نمودار آن به‌صورت زیر است

مساحت بین نمودار g و محور xها برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸+۲\times ۴=۲۴+۸=۳۲$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۲ اگر $k\in Z$ باشد، با توجه به اینکه جواب $\left[\frac{x+۳}{۴}\right]$ همواره عددی صحیح است، داریم:

$$\left[\frac{x+۳}{۴}\right]\in Z \Rightarrow \frac{x+۴}{۳}\in Z \Rightarrow \frac{x+۴}{۳}=k \Rightarrow x=۳k-۴$$

اکنون به‌جای x، مقدار $۳k-۴$ را قرار می‌دهیم:

$$\left[\frac{x+۳}{۴}\right]=\frac{x+۴}{۳} \Rightarrow \left[\frac{۳k-۴+۳}{۴}\right]=k \Rightarrow \left[\frac{۳k-۱}{۴}\right]=k \Rightarrow k\le\frac{۳k-۱}{۴}<k+۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴k\le ۳k-۱<۴k+۴$$

$$\xrightarrow{-۴k} ۰\le -k-۱<۴ \xrightarrow{+۱} ۱\le -k<۵ \xrightarrow{\times(-۱)} -۵<k\le -۱ \xrightarrow{k\in Z} k=-۴,-۳,-۲,-۱$$

اکنون مقادیر x را با توجه به مقادیر k به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x+۴}{۳}=k \Rightarrow x=۳k-۴ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} k & -۴ & -۳ & -۲ & -۱ \\ \hline x & -۱۶ & -۱۳ & -۱۰ & -۷ \end{array}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای x برابر -۴۶ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۳ محل برخورد خط $y = ۱۳ - ۳x$، با نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+\alpha}$، نقطه‌ای به‌طول $x = ۲k$ است؛ بنابراین:

$$f(۲k) = ۱۳ - ۳(۲k) \Rightarrow \sqrt{۲k+\alpha} = ۱۳ - ۶k \ , \ ۱۳ - ۶k \geq ۰ \Rightarrow k \leq \frac{۱۳}{۶} \quad (۱)$$

از طرفی محل برخورد تابع $f^{-۱}$ با خط داده‌شده، نقطه‌ای به‌طول $x = k$ است؛ بنابراین:

$$f^{-۱}(k) = ۱۳ - ۳k \Rightarrow f(۱۳ - ۳k) = k \Rightarrow \sqrt{۱۳ - ۳k + \alpha} = k \ , \ k \geq ۰ \quad (۲)$$

اکنون با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\sqrt{۲k+\alpha} = ۱۳ - ۶k \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲k + \alpha = ۱۶۹ - ۱۵۶k + ۳۶k^۲ \Rightarrow \alpha = ۳۶k^۲ - ۱۵۸k + ۱۶۹ \quad (*)$$

$$\sqrt{۱۳ - ۳k + \alpha} = k \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۳ - ۳k + \alpha = k^۲ \xrightarrow{(*)} ۱۳ - ۳k + ۳۶k^۲ - ۱۵۸k + ۱۶۹ = k^۲$$

$$\Rightarrow ۳۵k^۲ - ۱۶۱k + ۱۸۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۷} ۵k^۲ - ۲۳k + ۲۶ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۹} k = \frac{۲۳ \pm ۳}{۱۰} \xrightarrow{۰ \leq k \leq \frac{۱۳}{۶}} \begin{cases} k = \frac{۱۳}{۵} \ \times \\ k = ۲ \ \checkmark \xrightarrow{(*)} \alpha = -۳ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\alpha k = (-۳)(۲) = -۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۴ وارون g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x) = y = x + ۲\sqrt{x-۱} = x - ۱ + ۲\sqrt{x-۱} + ۱ \Rightarrow y = (\sqrt{x-۱} + ۱)^۲ \xrightarrow[y \geq ۰]{x \geq ۱} \sqrt{y} = \underbrace{|\sqrt{x-۱} + ۱|}_{\geq ۱} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x-۱} + ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} - ۱ = \sqrt{x-۱} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y - ۲\sqrt{y} + ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = y - ۲\sqrt{y} + ۲$$

$$g^{-۱}(x) = f(x) = x - ۲\sqrt{x} + ۲ = x - b\sqrt{x} + c \Rightarrow b = ۲ \ , \ c = ۲$$

بنابراین:

$$f(bc) = f(۴) = ۴ - ۲\sqrt{۴} + ۲ = ۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۵ دامنهٔ تابع f برابر $D_f = [-۴,۵]$ است. ضمناً از آنجا که تابع f، مجموع دو تابع اکیداً صعودی $g(x) = \sqrt{x+۴}$ و $h(x) = -۷\sqrt{۵-x}$ است، یک تابع اکیداً صعودی بوده و برد آن با جایگذاری ابتدا و انتهای دامنه در تابع f به‌دست می‌آید. پس برد تابع f برابر است با:

$$R_f = [f(-۴), f(۵)] = [۰ - ۷\sqrt{۹}, \sqrt{۹}] = [-۲۱,۳]$$

از طرفی تابع $y = (f^{-۱}of)(x)$، یک تابع همانی است که دامنهٔ آن همان D_f است، پس:

$$(f^{-۱}of)(x) = x \qquad x \in [-۴,۵]$$

همچنین تابع $y = (fof^{-۱})(x)$، یک تابع همانی با دامنهٔ $D_{f^{-۱}}$ یعنی R_f است، یعنی:

$$(fof^{-۱})(x) = x \qquad x \in [-۲۱,۳]$$

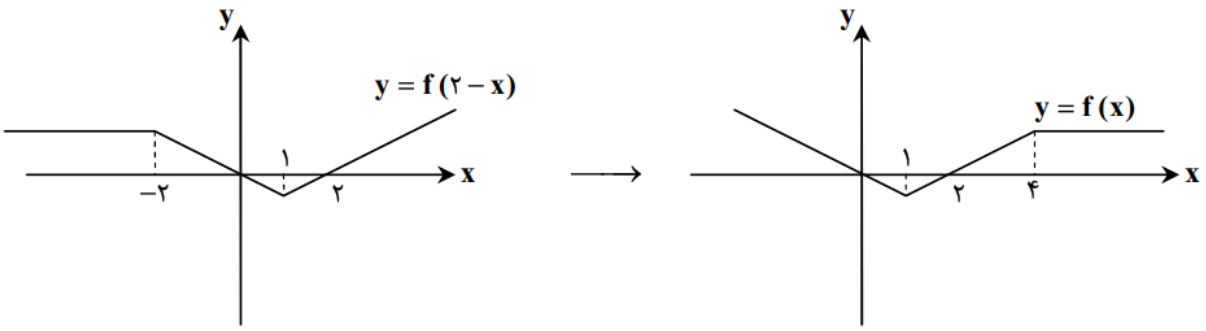
دامنهٔ مجموع این دو تابع برابر اشتراک دامنهٔ دو تابع یعنی $[-۴,۳]$ بوده و ضابطهٔ آن $y = (f^{-۱}of)(x) + (fof^{-۱})(x) = ۲x$ است. پس برد این تابع برابر $[-۸,۶]$ است.

$$-۴ \leq x \leq ۳ \Rightarrow -۸ \leq ۲x \leq ۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

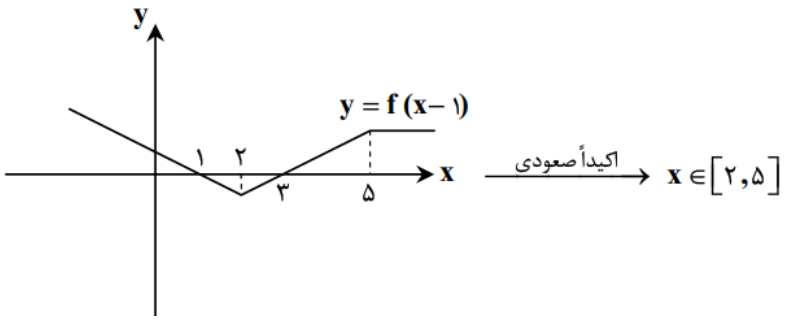
۱۵۶ **ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را با توجه به نمودار تابع $y=f(۲-x)$ رسم می‌کنیم.**

برای این کار طول نقاط روی تابع $f(۲-x)$ را قرینه کرده و سپس دو واحد به آن‌ها اضافه می‌کنیم. (یعنی نمودار $f(۲-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم.)



می‌خواهیم نمودار تابع $y=۲-f(x-۱)$ اکیداً نزولی باشد، پس باید نمودار تابع $f(x-۱)$ اکیداً صعودی باشد. (دقت کنید انتقال به بالا یا پایین تأثیری در یکنوایی تابع ندارد.)

پس کافی است نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم تا نمودار $f(x-۱)$ به‌دست آید:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۷ با توجه به اینکه تابع $f(x)$ به‌صورت خطی می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=ax+b \Rightarrow fof(x)=f\big(f(x)\big)=f(ax+b)=a(ax+b)+b$$

$$\Rightarrow a^۲x+ab+b=(m-۱)x^۲+x+۴ \Rightarrow m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$$

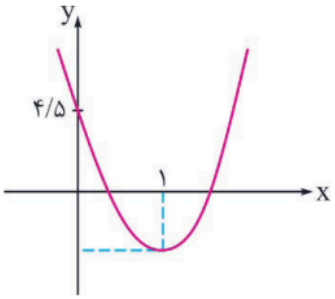
$$a^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \Rightarrow b+b=۴ \Rightarrow b=۲ \\ a=-۱ \Rightarrow -b+b=۴ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases} \Rightarrow f(x)=x+۲$$

با توجه به اینکه برد تابع g به‌صورت بازهٔ $[-۳,۴)$ می‌باشد، بنابراین ورودی تابع $f(x)$ برابر با $[-۳,۴)$ خواهد بود. پس داریم:

$$f(x)=x+۲ \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \Rightarrow f(-۳)=-۱ \\ x=۴ \Rightarrow f(۴)=۶ \end{cases} \Rightarrow R_{fog(x)}=(-۱,۶]$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۸ با توجه به شکل داده شده، معادله‌ی تابع y را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد.



$$y=a(x-\alpha)^{۳}+\beta \Rightarrow y=a(x-۲)^{۳}-۳/۵ \xrightarrow{(۰,۴/۵)} a=-۱$$

$$\Rightarrow y=-(x-۲)^{۳}-۳/۵=-(x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸)-۳/۵=(f.g)_{(x)}-x^{۳}$$

$$\Rightarrow (f.g)_{(x)}=۶x^{۲}-۱۲x+۴/۵$$

تابع $(f.g)$ در بازه‌ی $[۱,\infty)$ صعودی است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۵۹ تابع $f(x)$ تشکیل شده از دو تابع اکیداً نزولی است. $(y=-x^{۳}, y=-\sqrt{x-۲})$ پس خود تابع $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

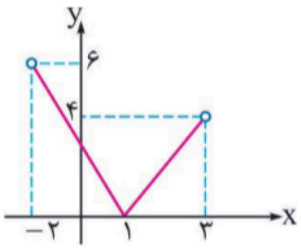
برای یافتن دامنه تابع g خواهیم داشت:

$$f(x^{۲})-f(x+۶)>۰ \Rightarrow f(x^{۲})>f(x+۶) \xrightarrow[f(x_۱)>f(x_۲)\Rightarrow x_۱<x_۲]{\text{چون تابع f اکیداً نزولی است.}} x^{۲}<x+۶$$

$$x^{۲}-x-۶<۰ \Rightarrow x\in(-۲,۳)$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

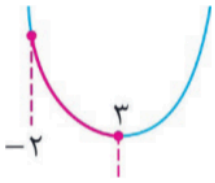
۱) $y=۲|x-۱|$



غیر یکنوا

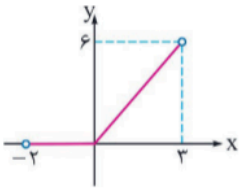
۲) $y=\sqrt{x}$ در بازه $(-۲,۰)$ تعریف نشده

۳) $y=(x-۳)^{۲}+۱$



اکیداً یکنوا

۴) $y=x+|x|$



یکنوا

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۰

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\log(-gof(x))}{\left[\left(\frac{۱}{۲}g^{۲}(x)-۲g(x)+۲\right)f(x)\right]}=\lim_{x\to ۲}\frac{\log(-g(f(x)))}{\left[\frac{۱}{۲}(g(x)-۲)^{۲}f(x)\right]}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{\log\left(-g(۰^{-})\right)}{\left[\frac{۱}{۲}(۰^{+})(۰^{-})\right]}=\lim_{x\to ۲}\frac{\log\left(-(۰^{-})\right)}{[۰]^{-}}=\lim_{x\to ۲}\frac{\log(۰^{+})}{-۱}==\frac{-\infty}{-۱}=+\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۱ برای دامنه تابع $f(x)$ خواهیم داشت: $\left(\tan x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\pi + \pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2,2) \qquad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (-2,2) - \{0\} \Rightarrow (-2,0) \cup (0,2) \quad (2 \text{ بازه به طول})$$

پس $b = a = 2$ خواهند بود. در تابع $g(x)$ جایگذاری خواهیم کرد.

$$\underbrace{\cos 2x}_{2\cos^2 x - 1} - 4\cos x + 3 = 2\cos^2 2x - 4\cos x + 2 = 2(\underbrace{\cos x - 1}_{-(1-\cos x)})^2$$

$$\underline{\underline{1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha}} \quad 2\left(-2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 = 8\sin^4 \frac{x}{2} \qquad T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۲ معکوس توابع g^{-1} و f را به‌دست می‌آوریم:

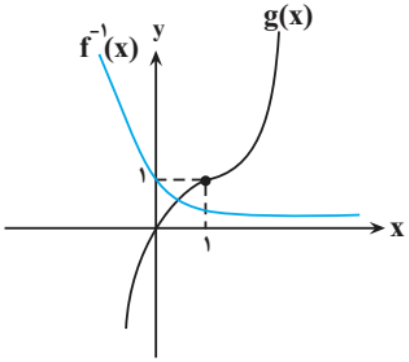
معکوس تابع g^{-1}:

$$y = \sqrt[3]{x-1} + 1 \xrightarrow{\text{تعویض جای } y,x} x = \sqrt[3]{y-1} + 1$$
$$\rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{y-1}$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۳}} (x-1)^3 = y - 1 \Rightarrow y = (x-1)^3 + 1$$

معکوس تابع f:

$$f(x) = y = \log_{0/5}^{x} \xrightarrow[y,x]{\text{تعویض جای}} x = \log_{0/5}^{y} \rightarrow 0/5^x = y = f^{-1}(x)$$

حال دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



پس نمودار $g(x)$ و $f^{-1}(x)$ یک نقطهٔ برخورد دارند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶۳

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}, x \neq 0$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{-1,0\}, \mathbb{R}_f = \mathbb{R} - \{-2,1\}$$

پس:

پس: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-2,1\}$ و برای شرط $f^{-1}(x) \in D_{f^{-1}}$ داریم:

$$f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{x-1} = \frac{x+2}{1-x} \neq 1, -2 \Rightarrow x \neq \frac{-1}{2}, 4$$

و بنابراین دامنهٔ $f^{-1}of^{-1}$ می‌شود $\mathbb{R} - \{-2, \frac{-1}{2}, 1, 4\}$ که شامل ۳ عدد صحیح نیست.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶۴ در ضابطهٔ $f(x)$، رادیکال اول را a و رادیکال دوم را b قرار می‌دهیم پس داریم:

$$y=(a+b)$$

طرفین عبارت را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$y^3=\underbrace{x^3+\sqrt{x^6+1}}_{a^3}+\underbrace{x^3-\sqrt{x^6+1}}_{b^3}+3\underbrace{\sqrt[3]{-1}}_{ab}(y)\quad y^3=2x^3-3y\Rightarrow y^3+3y=2x^3\Rightarrow \frac{y^3+3y}{2}=x^3\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{y^3+3y}{2}}=x\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x^3+3x}{2}}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶۵ وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{3x^2+b}{6x}\xrightarrow{\text{وارون}}x=\frac{3y^2+b}{6y}\Rightarrow 6xy=3y^2+b\Rightarrow 3y^2-6xy+b=0\Rightarrow y=\frac{6x\pm\sqrt{36x^2-12b}}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌سازی}}y=x\pm\sqrt{x^2-\frac{b}{3}}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ \frac{-b}{3}=1\Rightarrow b=-3\end{cases}$$

برای علامت c، کافی است دقت کنیم که دامنهٔ تابع $x>0$ است، پس برد تابع وارون نیز باید اعداد مثبت باشد. پس $(x+\sqrt{x^2+1})$ قابل قبول است و در نتیجه $c=1$ خواهد بود.

پس داریم:

$$a+b+c=1+(-3)+1=-1$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶۶ **بدیهی است محاسبهٔ f^{-1} و حل معادلهٔ $f=f^{-1}$ دشوار است، پس با راه‌حل دیگری مسئله را حل می‌کنیم.**

ابتدا دامنه و برد تابع را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}x\geq 0\\ 4+\sqrt{x}\geq 0\end{cases}\xrightarrow{x\geq 0}\text{برقرار است}\xrightarrow{\cap}D_f=[0,+\infty)$$

$$\sqrt{x}\geq 0\xrightarrow{+4}4+\sqrt{x}\geq 4\xrightarrow{\text{جذر}}\sqrt{4+\sqrt{x}}\geq 2\xrightarrow{\text{قرینه}}-\sqrt{4+\sqrt{x}}\leq -2\xrightarrow{+2}2-\sqrt{4+\sqrt{x}}\leq 0$$

$$\Rightarrow R_f=(-\infty,0]$$

با توجه به دامنه و برد f، مشخص است که تابع f در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار دارد، پس وارون آن در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قرار دارد و چون $f(0)=0$، پس نمودار از مبدأ عبور می‌کند و تنها محل برخورد f و f^{-1} مبدأ مختصات است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۷ **ابتدا ضابطهٔ g را به‌دست می‌آوریم:**

$$g(x)=f\left(2-\frac{x}{3}\right)=\sqrt{1+\sqrt{1+2-\frac{x}{3}}}=\sqrt{1+\sqrt{3-\frac{x}{3}}}$$

اکنون برد g را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{3-\frac{x}{3}}\geq 0\xrightarrow{+1}1+\sqrt{3-\frac{x}{3}}\geq 1\xrightarrow{\text{جذر}}\sqrt{1+\sqrt{3-\frac{x}{3}}}\geq 1\Rightarrow g(x)\geq 1\Rightarrow R_g=D_{g^{-1}}=[1,+\infty)$$

حال وارون g را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{1+\sqrt{3-\frac{x}{3}}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}y^2=1+\sqrt{3-\frac{x}{3}}\Rightarrow y^2-1=\sqrt{3-\frac{x}{3}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(y^2-1)^2=3-\frac{x}{3}\Rightarrow (y^2-1)^2-3=-\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow x=-3(y^2-1)^2+9\Rightarrow g^{-1}(x)=-3(x^2-1)^2+9\Rightarrow g^{-1}(x)=-3x^4+6x^2+6\quad,\quad x\geq 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۸ نکته: اگر تابع f با دامنهٔ $D_f=[a,b]$ اکیداً نزولی باشد، برد تابع بازهٔ $[f(b),f(a)]$ است.

نکته: ترکیب هر تابع وارون‌پذیر با تابع وارونش برابر تابع همانی است.

$$(f^{-1}of)(x)=x \quad , \quad x\in D_f$$

$$(fof^{-1})(x)=x \quad , \quad x\in R_f$$

توابع $y=\sqrt{6-x}$ و $y=-\sqrt{x+1}$ روی دامنهٔ خود اکیداً نزولی هستند، پس تابع $f(x)=\sqrt{6-x}-\sqrt{x+1}$ روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

ابتدا دامنهٔ تابع را یافته و به کمک آن، برد تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1 \\ 6-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 6 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1\leq x\leq 6 \Rightarrow D_f=[-1,6]$$

$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=\sqrt{7} \quad , \quad x=6 \Rightarrow f(6)=-\sqrt{7} \Rightarrow R_f=[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$$

تابع fof^{-1} با دامنهٔ $[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$ تابع همانی است:

$$y=(fof^{-1})(x)=x \ , \ x\in R_f \Rightarrow y=x \ , \ x\in[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$$

پس ۵ نقطه با مختصات صحیح بر روی تابع فوق قرار دارند که عبارتند از:

$$\begin{vmatrix} x=-2 \\ y=-2 \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=-1 \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} x=0 \\ y=0 \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} x=1 \\ y=1 \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} x=2 \\ y=2 \end{vmatrix}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۶۹ $$y=\log_3(\sqrt{x^2+1}-x) \rightarrow \sqrt{x^2+1}-x=3^y \rightarrow \sqrt{x^2+1}=3^y+x \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2+1=3^{2y}+x^2+2x\times 3^y$$

$$\rightarrow 2x\times 3^y=1-3^{2y} \rightarrow x=\frac{1}{2}(\frac{1-3^{2y}}{3^y})=\frac{-1}{2}(3^y-\frac{1}{3^y}) \rightarrow f^{-1}(y)=\frac{-1}{2}(3^y-\frac{1}{3^y}) \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-1}{2}(3^x-\frac{1}{3^x})$$

$$\frac{-1}{2}(3^x-\frac{1}{3^x})=a(3^x+\frac{b}{3^x}) \rightarrow \begin{cases} a=\frac{-1}{2} \\ b=-1 \end{cases} \quad a^2+b^2=(\frac{-1}{2})^2+(-1)^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷۰ ابتدا ضابطهٔ $y=fof(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$fof(x)=\begin{cases} (-x-2)^2+1 \ , \ x\geq 0 \\ -x^2-3 \ , \ x<0 \end{cases}$$

حال نقاط تلاقی $g(x)$ و $fof(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\geq 0: (-x-2)^2+1=-x^2+11 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \ \checkmark \\ x=-3 \ \times \end{cases} \qquad x<0: -x^2-3=-x-4 \Rightarrow x^2-x-1=0 \rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \times \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \checkmark \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب: $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)\cup(1,+\infty)$ $\qquad a=\frac{1-\sqrt{5}}{2},b=0,c=1 \rightarrow 2a+b-c=1-\sqrt{5}+0-1=-\sqrt{5}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷۱ ابتدا مقدار تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2x-6}{x-2}\right]+x-2=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2x-4}{x-2}-\frac{2}{x-2}\right]+x-2 \quad =\lim_{x\to 0^+}\left[2-\frac{2}{x-2}\right]+x-2=\left[2+1^+\right]+0^+-2=1^+$$

سپس با جایگذاری دوبارهٔ مقدار به‌دست آمده در تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0^+} fof(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x-6}{x-2}\right]+x-2=[4^+]+1^+-2=3^+$$

در نتیجه:

$$\left[\lim_{x\to 0^+} fof(x)\right]=[3^+]=3$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۲ پاسخ تشریحی

گام اول: برد تابع درجه‌سوم همواره برابر $\mathbb{R}$ است، پس بدیهی است که ضریب x^3 در این تابع برابر صفر است و تابع درجه‌دوم خواهد بود.

$$f(x)=(2x-1)^3+ax^2(x-1)=8x^3-12x^2+6x-1+ax^3-ax^2$$

$$\Rightarrow f(x)=(a+8)x^3-(a+12)x^2+6x-1$$

$$a+8=0 \Rightarrow a=-8$$

گام دوم: مقدار $a=-8$ را در تابع $f(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=-4x^2+6x-1$$

بیشترین مقدار این تابع برابر است با:

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(6^2-4(-4)(-1))}{4(-4)}=\frac{-20}{-16}=\frac{5}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۳ پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که جواب باید برای هر تابع f و g با مشخصات بیان‌شده در صورت سؤال برقرار باشد، می‌توان دو تابع دلخواه (منطبق با شرایط مسئله) به جای f و g در نظر گرفت. فرض می‌کنیم $f(x)=x+1$ و $g(x)=-x+1$ باشد.

گام دوم: با جای‌گذاری f و g در تابع داریم:

$$y=\sqrt{\frac{(x+1)(-x+1)}{x^3-1}}=\sqrt{\frac{-(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}}=\sqrt{\frac{-(x+1)}{x^2+x+1}}$$

گام سوم: عبارت x^2+x+1 همواره مثبت است $(\Delta<0, a>0)$، بنابراین دامنهٔ تعریف تابع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{-(x+1)}{x^2+x+1}\geq 0 \Rightarrow -(x+1)\geq 0 \Rightarrow x+1\leq 0 \Rightarrow x\leq -1$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-1]$$

بنابراین دامنهٔ تعریف به صورت کلی $(-\infty,a]$ قابل نمایش است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y=ax+a \Rightarrow ax=y-a \Rightarrow x=\frac{y-a}{a} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} f^{-1}(x)=\frac{x-a}{a}$$

گام دوم: نمودار تابع $f.f^{-1}$ همواره بالای نمودار تابع fof^{-1} است. از طرفی $(fof^{-1})(x)=x$ است، پس داریم:

$$f.f^{-1}>fof^{-1} \Rightarrow (ax+a)(\frac{x-a}{a})>x \Rightarrow (x+1)(x-a)>x \Rightarrow x^2-ax-a>0$$

گام سوم: نامعادلهٔ $x^2-ax-a>0$ در صورتی همواره برقرار است که $\Delta<0$ باشد؛ بنابراین داریم:

$$\Delta=(-a)^2-4(-a)<0 \Rightarrow a^2+4a<0 \Rightarrow a(a+4)<0 \Rightarrow -4<a<0$$

گام چهارم:

$$f(1)=2a \Rightarrow -8<f(1)<0 \Rightarrow \text{مقادیر صحیح} = -7,-6,\ldots,-1$$

$$\text{مجموع مقادیر صحیح} = -(1+2+\cdots+7)=-28$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۵ **پاسخ تشریحی**

گام اول: دامنهٔ توابع f و g و اشتراک دامنه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0\leq x\leq 1 \Rightarrow D_f=[0,1]$$

$$\begin{cases} x-x^2\geq 0 \Rightarrow x(1-x)\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 1 \\ 1+2\sqrt{x-x^2}\geq 0 \quad \text{بدیهی است} \end{cases} \Rightarrow D_g=[0,1]$$

بنابراین $D_f\cap D_g=[0,1]$ است.

گام دوم: برای تعیین دامنهٔ تابع h لازم است معادلات $f(x)=0$ و $g(x)=0$ را حل کنیم، ولی واضح است که هیچ‌کدام از این دو معادله جواب حقیقی ندارند:

$$D_h=D_{\frac{f}{g}}\cap D_{\frac{g}{f}} \xrightarrow[g(x)\neq 0]{f(x)\neq 0} D_h=D_f\cap D_g=[0,1]$$

گام سوم: تابع g را ساده کرده و سپس توابع $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt{1+2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\sqrt{(1-x)+x+2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\sqrt{(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})^2}=|\sqrt{1-x}+\sqrt{x}|=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}=f(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{g(x)}{f(x)}=1+1=2 \Rightarrow h(x)=2,\ 0\leq x\leq 1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۶ **گام اول:** تابع $f=\{(2x+1,3-x)\,|\,-2<x<a\}$ نوع دیگر نمایش $f(2x+1)=3-x$ با دامنهٔ $-2<x<a$ می‌باشد، برای این‌که $f(x)$ را به دست آوریم، از تغییر متغیر $2x+1=t$ استفاده می‌کنیم:

$$2x+1=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2} \xrightarrow[f(2x+1)=3-x]{\text{جای‌گذاری در}} f(t)=3-\frac{t-1}{2}=\frac{6-t+1}{2}$$

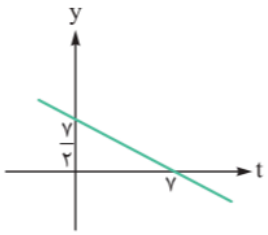
$$=\frac{7-t}{2} \Rightarrow f(t)=\frac{-t}{2}+\frac{7}{2}$$

گام دوم: از آن‌جا که $x=\frac{t-1}{2}$ و دامنهٔ f هم برابر با $-2<x<a$ است، حدود t را به دست می‌آوریم:

$$-2<x<a \Rightarrow -2<\frac{t-1}{2}<a \Rightarrow -4<t-1<2a$$

$$\Rightarrow -3<t<2a+1$$

گام سوم: پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(t)=\frac{-t}{2}+\frac{7}{2}, -3<t<2a+1$ می‌باشد. توجه کنید که نمودار تابع $y=\frac{-t}{2}+\frac{7}{2}$ به شکل روبه‌رو است:



گام چهارم: می‌بینید که تابع بعد از $t=7$، از ناحیهٔ چهارم عبور می‌کند، در حالی که ما نمی‌خواهیم این اتفاق بیفتد، پس باید $t<7$. طبق صورت سؤال که $-2<x<a$، پس $a>-2$، از طرفی هم $-3<t<2a+1$، در نتیجه:

$$\begin{cases}-3<t<2a+1\\ t<7\end{cases} \Rightarrow 2a+1\le 7 \Rightarrow a\le 3 \xrightarrow[a>-2]{\text{اشتراک با}} -2<a\le 3$$

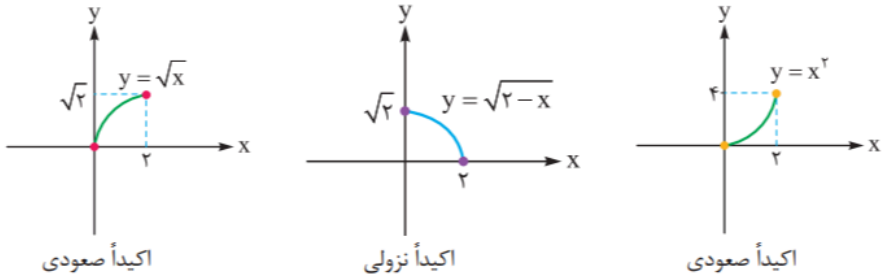
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۷

گام اول: ابتدا دامنهٔ f را پیدا می‌کنیم: $\xrightarrow{\cap} D_f = [0,2]$

$$y=\sqrt{x}: x\geq 0$$
$$y=\sqrt{2-x}: 2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2$$

گام دوم: توابع $y=\sqrt{x}$ ، $y=\sqrt{2-x}$ و $y=x^2$ را در دامنهٔ f رسم می‌کنیم و یکنوایی هر یک را مشخص می‌کنیم:



گام سوم: توجه کنید که چون تابع $y=\sqrt{2-x}$ اکیداً نزولی است، تابع $y=-\sqrt{2-x}$ اکیداً صعودی می‌شود، تابع f از جمع توابع $y=\sqrt{x}$ ، $y=-\sqrt{2-x}$ و $y=x^2$ به دست آمده است، پس:

$$f(x)=\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{اکیداً صعودی}}+\underbrace{(-\sqrt{2-x})}_{\text{اکیداً صعودی}}+\underbrace{x^2}_{\text{اکیداً صعودی}}$$

جمع سه تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است، پس f اکیداً صعودی می‌باشد.

گام چهارم: f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $[0,2]$ است پس برد آن برابر می‌شود با $[f(0),f(2)]$:

$$f(0)=\sqrt{0}-\sqrt{2-0}+0^2=-\sqrt{2}$$
$$f(2)=\sqrt{2}-\sqrt{2-2}+2^2=\sqrt{2}+0+4=\sqrt{2}+4$$

گام پنجم: با توجه به صورت سؤال، برد f بازهٔ $[m,n]$ است، پس $m=-\sqrt{2}$ و $n=\sqrt{2}+4$؛ بنابراین خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\frac{n+m}{m}=\frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{4}{-\sqrt{2}}\xrightarrow{\text{گویاکردن}}\frac{4}{-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{-4\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}=-\sqrt{8}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۸

گام اول: با توجه به نکتهٔ گفته‌شده، ابتدا شرط تابع‌بودن f را بررسی می‌کنیم:

$$f=\{(1,2m),(2,3),(-3m,2),(1,m^2-3),(3,2m)\} \Rightarrow 2m=m^2-3$$
$$\Rightarrow m^2-2m-3=0 \Rightarrow (m-3)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-1 \end{cases}$$

گام دوم: mهای به‌دست‌آمده را در f جای‌گذاری می‌کنیم و شرط تابع‌بودن را بررسی می‌کنیم:

$m=3 \Rightarrow f=\{(1,6),(2,3),(-9,2),(3,6)\}$ ✓ تابع است

$m=-1 \Rightarrow f=\{(1,-2),(2,3),(3,2),(3,-2)\}$ ✗ تابع نیست

اگر $m=-1$، آن‌گاه به ازای ورودی یکسان ۳، خروجی‌های متفاوت داریم، پس $m=3$ و در نتیجه:

$$f=\{(1,6),(2,3),(-9,2),(3,6)\}$$

گام سوم: می‌دانیم $fof(2)$ برابر $f(f(2))$ است، با توجه به گام دوم خواهیم داشت:

$$fof(2)=f(\underbrace{f(2)}_{3})=f(3)=6$$

پس پاسخ گزینهٔ (۳) است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۷۹ **گام اول:** fog را تشکیل می‌دهیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲g(x)+m}{g(x)+۳}=\frac{۲(\frac{-۳x+۲m}{x-۲})+m}{(\frac{-۳x+۲m}{x-۲})+۳}$$

$$=\frac{\frac{-۶x+۴m+mx-۲m}{x-۲}}{\frac{-۳x+۲m+۳x-۶}{x-۲}}=\frac{(-۶+m)x+۲m}{۲m-۶}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\frac{(-۶+m)x+۲m}{۲m-۶} \Rightarrow fog(x)=(\frac{-۶+m}{۲m-۶})x+\frac{۲m}{۲m-۶}$$

گام دوم: gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{-۳f(x)+۲m}{f(x)-۲}=\frac{-۳(\frac{۲x+m}{x+۳})+۲m}{\frac{۲x+m}{x+۳}-۲}$$

$$=\frac{\frac{-۶x-۳m+۲mx+۶m}{x+۳}}{\frac{۲x+m-۲x-۶}{x+۳}}=\frac{(-۶+۲m)x+۳m}{m-۶}$$

$$\Rightarrow gof(x)=(\frac{-۶+۲m}{m-۶})x+\frac{۳m}{m-۶}$$

گام سوم: با توجه به صورت سؤال، gof و fog خطی هستند و شیب‌هایشان برابر است، پس در هر دو تابع ضرایب x را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-۶+m}{۲m-۶}=\frac{-۶+۲m}{m-۶} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} m^۲-۱۲m+۳۶=۴m^۲-۲۴m+۳۶$$

$$\Rightarrow ۳m^۲-۱۲m=۰ \Rightarrow ۳m(m-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ m=۴ \end{cases}$$

پس به ازای $m=۰$ و $m=۴$ دو تابع gof و fog خطی هستند و شیب آن‌ها برابر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۰ **گام اول:** با دو تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج مواجه هستیم و این توابع زمانی قابل تعریف هستند که عبارت‌های زیر رادیکال نامنفی باشند:

$$\sqrt{۲x+۱}: ۲x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt{۴-۲x}: ۴-۲x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۲$$

گام دوم: با توجه به حدود x، حدود عبارت‌های داخل پرانتزی را که ورودی‌های دو تابع هستند، به دست می‌آوریم:

$$f: x\geq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow -x\leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲-x\leq \frac{۵}{۲} \Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{۵}{۲}]$$

$$g: x\leq ۲ \Rightarrow x+۳\leq ۵ \Rightarrow D_g=(-\infty,۵]$$

گام سوم: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof به ضابطهٔ تابع f نیز نیاز داریم؛ این طور عمل می‌کنیم:

$$f(۲-x)=\sqrt{۲x+۱} \xrightarrow[x=۲-t]{۲-x=t} f(t)=\sqrt{۲(۲-t)+۱}=\sqrt{۵-۲t}$$

پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{۵-۲x}$ است.

گام چهارم: در این گام مطلوب مسئله، یعنی دامنهٔ تابع gof را حساب می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\leq \frac{۵}{۲}}_{D_f} \mid \underbrace{\sqrt{۵-۲x}}_{f(x)} \underbrace{\leq ۵}_{D_g}\}$$

نامساوی داخل تعریف را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{۵-۲x}\leq ۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵-۲x\leq ۲۵ \Rightarrow ۲x\geq -۲۰ \Rightarrow x\geq -۱۰$$

پس تعریف D_{gof} به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$D_{gof}=\{x\leq \frac{۵}{۲} \mid x\geq -۱۰\}=[-۱۰,\frac{۵}{۲}]$$

این بازه شامل $۱+(-۱۰)-۲=۱۳$ عدد صحیح -۱۰، -۹، .... تا ۲ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۱ **گام اول:** تابع g و همچنین تابع fog چندجمله‌ای‌های درجه‌دوم هستند، این یعنی تابع f یک چندجمله‌ای با درجهٔ حداکثر ۱ است.

گام دوم: پس ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=a\,g(x)+b=a\underbrace{(x^۲-۲x+۳)}_{(x-۱)^۲+۲}+b$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=ax^۲-۲ax+۳a+b$$

این ضابطه باید با ضابطهٔ مفروض صورت سؤال متحد باشد. پس داریم:

$$ax^۲-۲ax+۳a+b\equiv ۳x^۲-۶x+۱۴ \Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ -۲a=-۶ \Rightarrow a=۳ \\ ۳a+b=۱۴ \xrightarrow{a=۳} b=۵ \end{cases}$$

گام سوم: در نتیجه ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x)=۳x+۵$ پیدا کردیم. حالا خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$(fof)(۳)=f(\underbrace{f(۳)}_{۳(۳)+۵})=f(۱۴)=۳(۱۴)+۵=۴۷$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۲ **گام اول:** ابتدا دامنهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{ax-x^{۲}}}{[x]+[-x]+۱} \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ ax-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x(a-x)\geq ۰ \xrightarrow[a>۰]{\text{بین دو ریشه}} ۰\leq x\leq a \quad (۱) \\ ۲)\ [x]+[-x]+۱\neq ۰ \Rightarrow [x]+[-x]\neq -۱ \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \quad (۲) \end{cases}$$

به ازای xهای غیرصحیح، $[x]+[-x]$ برابر با -۱ می‌شود، پس $x\in\mathbb{Z}$ باید باشد.

در نتیجه از اشتراک (۱) و (۲)، $D_f=[۰,a]\cap\mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

گام دوم: دامنهٔ تابع g به صورت $D_g=\{۰,b,b+۱\}$ است. پس داریم:

$$D_f=D_g \Rightarrow [۰,a]\cap\mathbb{Z}=\{۰,b,b+۱\} \Rightarrow D=\{۰,۱,۲\} \Rightarrow \begin{cases} b=۱ \\ a=۲ \end{cases}$$

گام سوم: دو تابع مساوی هستند پس:

$$g(b)=c=f(b)=f(۱) \Rightarrow c=\frac{\sqrt{۲\times ۱-۱^{۲}}}{۰+۱}=۱ \Rightarrow c=۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۳ **گام اول:** از تساوی‌های داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} f(x)-g(x)=x^{۲}-x \\ \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{۲x-۱} \end{cases} \xrightarrow[\text{جای‌گذاری در اولی}]{f(x)=\frac{x}{۲x-۱}g(x)} \frac{x}{۲x-۱}g(x)-g(x)=x^{۲}-x$$

$$\Rightarrow g(x)\left(\frac{x-۲x+۱}{۲x-۱}\right)=x^{۲}-x \Rightarrow g(x)=\frac{(۲x-۱)\,\overset{x(x-۱)}{\cancel{(x^{۲}-x)}}}{۱-x}=-x(۲x-۱)=-۲x^{۲}+x$$

گام دوم: پس $f(x)=\dfrac{x}{۲x-۱}g(x)=\dfrac{x}{۲x-۱}(-x(۲x-۱))=-x^{۲}$ می‌شود.

گام سوم: حالا تابع $\dfrac{۱}{f+g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$h(x)=\frac{۱}{f(x)+g(x)}=\frac{۱}{-x^{۲}-۲x^{۲}+x}=\frac{۱}{-۳x^{۲}+x}=\frac{۱}{x(-۳x+۱)} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

پس $D_h=\mathbb{R}-\{۰,\frac{۱}{۳}\}$ است.

گام چهارم: مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع h قرار ندارند، برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۴ **گام اول:** تابع f به صورت یک تابع هموگرافیک تعریف شده است. برای این‌که در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد و اکیداً نزولی باشد، باید ضریب x در مخرج برابر با صفر باشد؛ پس $a=0$ بوده و $f(x)=3-2x$ یک تابع اکیداً نزولی در $\mathbb{R}$ است.

گام دوم: تابع g درجه ۲ است. برای این‌که در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، باید ضریب x^2 برابر با صفر باشد، پس:

$$b^2-1=0 \Rightarrow b=\pm 1 \begin{cases} \xrightarrow{b=1} \begin{cases} g(x)=bx-1=x-1: \text{اکیداً صعودی} & \times \\ g(x)=bx-1=-x-1: \text{اکیداً نزولی} & \checkmark \end{cases} \\ \xrightarrow{b=-1} \end{cases}$$

پس $f(x)=3-2x$ و $g(x)=-x-1$ است.

گام سوم: هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $f-2g=3-2x-2(-x-1)=5$: ثابت

۲) $g-2f=-x-1-2(3-2x)=3x-7$: اکیداً صعودی ✓

۳) $f-g=3-2x-(-x-1)=-x+4$: اکیداً نزولی

۴) $f+g=3-2x-x-1=-3x+2$: اکیداً نزولی

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۵ **گام اول:** به کمک تابع f داده‌شده، $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم و برابر با $f(g(x))=x^2+2x-3$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=x^2-6x+5 \Rightarrow f(g(x))=g^2(x)-6g(x)+5=x^2+2x-3$$

گام دوم: حالا به کمک مربع کامل‌کردن دو طرف معادله داریم:

$$(g(x)-3)^2-9+5=(x+1)^2-1-3$$

$$\Rightarrow (g(x)-3)^2=(x+1)^2 \Rightarrow g(x)-3=|x+1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x)-3=x+1 \\ g(x)-3=-x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x)=x+4 & \times \\ g(x)=-x+2 & \checkmark \end{cases}$$

گام سوم: تابع $g(x)$ اکیداً نزولی است، پس $g(x)=-x+2$ قابل قبول است.

گام چهارم: محل تلاقی تابع g با محور عرض‌ها برابر با $g(0)=2$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۶ **گام اول:** برای این‌که تابع $f(g(x))-g(f^{-1}(x))$ را تشکیل دهیم، باید x از دامنهٔ مشترک $f^{-1}(x)$ و $g(x)$ انتخاب شود.

بنابراین ابتدا دامنهٔ این دو تابع را مشخص می‌کنیم:

$$D_g = [۲,۷] : \text{از روی نمودار}$$

$$f^{-1}(x) = \{(۲,۳),(۷,۲),(-۲,۴),(۹,۵)\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \{۲,۷,-۲,۹\}$$

گام دوم: اشتراک دامنه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x \in (D_{f^{-1}} \cap D_g) = \{۲,۷\}$$

گام سوم: به ازای xهای به‌دست‌آمده، تابع مد نظر را تشکیل می‌دهیم:

$$x = ۲ \Rightarrow y = f(g(۲)) - g(f^{-1}(۲)) = \underbrace{f(۱)}_{\text{نداریم}} - g(۳) \Rightarrow \text{موجود نیست.}$$

$$x = ۷ \Rightarrow y = f(g(۷)) - g(f^{-1}(۷)) = f(۴) - g(۲) = -۲ - ۱ = -۳$$

بنابراین فقط یک زوج مرتب $\{(۷,-۳)\}$ در تابع $fog - gof^{-1}$ وجود دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۷ **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع درجه‌دوم g را پیدا می‌کنیم. با توجه به این‌که رأس سهمی داده شده است، این تابع را به فرم $g(x) = a(x-x_S)^۲ + y_S$ می‌نویسیم. داریم:

$$(x_S, y_S) = (۲,۰) \Rightarrow g(x) = a(x-۲)^۲ + ۰$$

نقطهٔ $(۰,۴)$ نیز روی این تابع قرار دارد، بنابراین:

$$۴ = a \times ۴ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow g(x) = (x-۲)^۲$$

گام دوم: حالا ضابطهٔ تابع خطی f را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}(-۱,۰)\\(۰,۲)\end{cases} \Rightarrow y - ۰ = \frac{۰-۲}{-۱-۰}(x-(-۱)) \Rightarrow y = ۲(x+۱)$$

گام سوم: ضابطهٔ وارون تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{y}{۲} = x + ۱ \Rightarrow x = \frac{y}{۲} - ۱ \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{۲} - ۱$$

گام چهارم: پس در نهایت داریم:

$$gof^{-1}(x) = g(f^{-1}(x)) = g(\frac{x}{۲}-۱) = (\frac{x}{۲}-۱-۲)^۲ = (\frac{x-۶}{۲})^۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۸ **گام اول:** ضابطهٔ $x-2$ به ازای $x<-1$ نزولی است. برد این بخش را به دست می‌آوریم:

$$x<-1 \Rightarrow -x>1 \Rightarrow -x+2>3 \Rightarrow y\in(3,+\infty)$$

گام دوم: برای این‌که تابع f یک‌به‌یک باشد، باید ضابطهٔ $mx-x^2$ به ازای $x\geq -1$ دو شرط داشته باشد:

۱) باید در دامنهٔ خودش یک‌به‌یک باشد، بنابراین طول رأس تابع درجه‌دوم نباید از $x=-1$ بیشتر باشد:

$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-m}{-2}\leq -1 \Rightarrow m\leq -2$$

۲) مقدار این ضابطه به ازای $x=-1$ نباید بیشتر از $y=3$ شود. در غیر این صورت با برد ضابطهٔ اول اشتراک خواهد داشت:

$$y(-1)\leq 3 \Rightarrow m(-1)-(-1)^2\leq 3 \Rightarrow -m-1\leq 3 \Rightarrow -m\geq 4 \Rightarrow m\geq -4$$

گام سوم: از اشتراک بازه‌های به‌دست‌آمده برای m داریم: $-4\leq m\leq -2$ و چون عدد صحیح فرد m مد نظر است، $m=-3$ است.

گام چهارم: باید مقدار $f^{-1}(-6)$ را پیدا کنیم. می‌دانیم رابطهٔ $f(a)=b\leftrightarrow f^{-1}(b)=a$ برقرار است، پس:

$$f^{-1}(-6)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=-6 \Rightarrow f(\alpha)=\begin{cases}2-\alpha,\ \alpha<-1 \Rightarrow 2-\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=8 \text{ (چون } \alpha<-1 \text{ باید باشد، پس قابل قبول نیست.)}\\ -3\alpha-\alpha^2,\ \alpha\geq -1 \Rightarrow -3\alpha-\alpha^2=-6\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2+3\alpha-6=0 \Rightarrow \Delta=9+24=33 \Rightarrow \alpha=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2} \xrightarrow{\alpha\geq -1} \alpha=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۸۹ **گام اول:** با توجه به این‌که پیداکردن وارون تابع f دشوار است، به جای حل معادلهٔ $f^{-1}=g$، هر دو تابع را وارون می‌کنیم، یعنی معادلهٔ $f=g^{-1}$ را حل می‌کنیم و سپس جای x و y را در جواب، با هم عوض می‌کنیم.

گام دوم:

$$g(x)=2x \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x}{2}$$

$$f=g^{-1} \Rightarrow \frac{x}{2}+2\sqrt{x+1}-3=\frac{x}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+1}=3 \Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow x+1=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{5}{8} \Rightarrow A'(\frac{5}{4},\frac{5}{8})$$

بنابراین نقطهٔ $A(\frac{5}{8},\frac{5}{4})$ نقطهٔ تلاقی دو تابع f^{-1} و g است.

گام سوم: طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(\frac{5}{8}+\frac{3}{8})^2+(\frac{9}{4}-\frac{5}{4})^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹۰ **گام اول:** در تساوی داده‌شده، مقدار $x = ۰$ را قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$-f(۰)+۴f^{-۱}(۰)=۱ \xrightarrow{f(۰)=۱} ۴f^{-۱}(۰)=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۰)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=۰$$

گام دوم: مقدار $x = \frac{۱}{۲}$ را در تساوی دادشده قرار می‌دهیم:

$$(\frac{a}{۲}-۱)f(\frac{۱}{۲})+(۴-a)f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=۱ \xrightarrow{f(\frac{۱}{۲})=۰} (۴-a)f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=۱ \Rightarrow f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴-a}$$

گام سوم: طبق فرض داریم $f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=۲f(۱)$، بنابراین:

$$۲f(۱)=\frac{۱}{۴-a} \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{۸-۲a}$$

گام چهارم: مقدار $x = ۱$ را در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$(a-۱)f(۱)+(۴-۲a)f^{-۱}(۱)=۱$$

از طرفی می‌دانیم $f(۰)=۱$، پس $f^{-۱}(۱)=۰$:

$$(a-۱)f(۱)+۰=۱ \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{a-۱}$$

گام پنجم: با توجه به نتایج حاصل از گام‌های سوم و چهارم داریم:

$$\frac{۱}{۸-۲a}=\frac{۱}{a-۱} \Rightarrow ۸-۲a=a-۱ \Rightarrow ۳a=۹ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow [\frac{۳a}{۲}]=[\frac{۹}{۲}]=۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹۱ **گام اول (اعمال انتقال افقی)**: ابتدا باید تابع $f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، یعنی $f(x-2)$؛ پس داریم:

$$f(x-2)=\frac{2(x-2)-a}{x-2+2}=\frac{2x-4-a}{x}$$

گام دوم (قرینه نسبت به محور yها): برای این‌که نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنیم باید به جای x، $(-x)$ را قرار دهیم؛ یعنی:

$$g(x)=f(-x-2)=\frac{-2x-4-a}{-x}$$

که این ضابطهٔ تابع g است.

گام سوم (به دست آوردن تابع وارون $g^{-1}(x)$): با توجه به نکته، وارون تابع $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $g^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است؛ پس داریم:

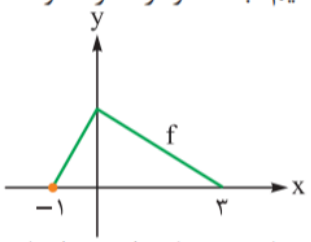
$$g(x)=\frac{-2x-4-a}{-x}\xrightarrow[c=-1,d=0]{a=-2,b=-4-a} g^{-1}(x)=\frac{0(x)-4-a}{-x-(-2)}=\frac{-4-a}{-x+2}=\frac{4+a}{x-2}$$

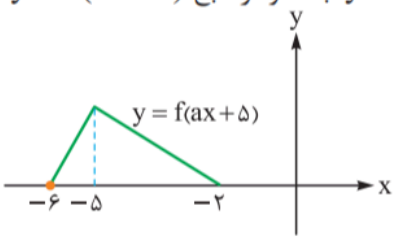
گام چهارم (به دست آوردن نقطهٔ برخورد $g^{-1}of$ با محور yها): برای به دست آوردن محل برخورد با محور yها کافی است $(g^{-1}of)(0)$ را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$x=0\xrightarrow{f(x)=\frac{2x-a}{x+2}}\boxed{\begin{matrix}f(0)\\-\frac{a}{2}\end{matrix}}\xrightarrow{g^{-1}(x)=\frac{4+a}{x-2}} g^{-1}\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{4+a}{-\frac{a}{2}-2}=\frac{4+a}{\frac{-a-4}{2}}=-2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

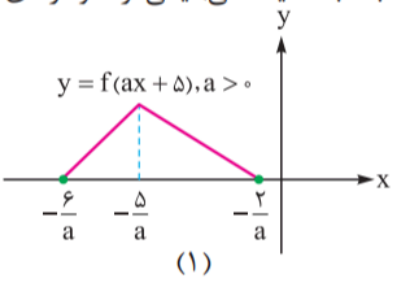
۱۹۲ **گام اول (اعمال تغییرات):** برای این‌که از نمودار تابع $y=f(x)$ به نمودار تابع $y=f(ax+۵)$ برسیم، ابتدا نمودار f را ۵ واحد به چپ انتقال می‌دهیم:



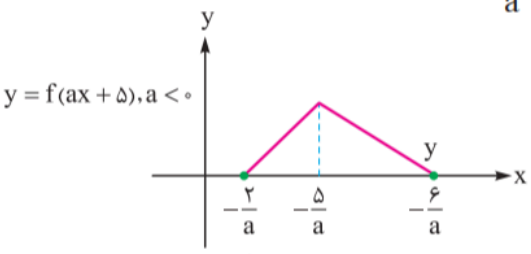


پس داریم:

حالا نمودار به‌دست‌آمده را با ضریب $\frac{۱}{a}$ منبسط می‌کنیم که با توجه به علامت a (این‌که مثبت باشد یا منفی) یکی از نمودارهای زیر حاصل می‌شود.



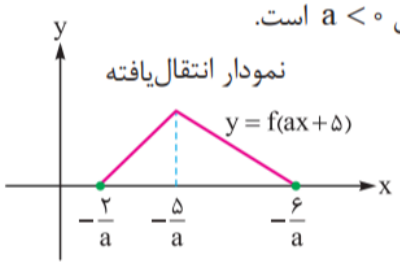
(۱)

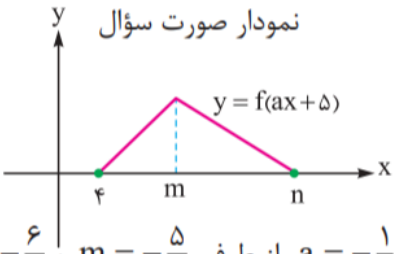


(۲)

که با توجه به نمودار تابع $y=f(ax+۵)$ صورت سؤال، نمودار (۲) مد نظر است، پس $a<۰$ است.

گام دوم (مشخص‌کردن مقادیر a، m و n):





که با توجه به دو نمودار: $-\frac{۲}{a}=۴$ است؛ پس $a=-\frac{۱}{۲}$. از طرفی $m=-\frac{۵}{a}$ و $n=-\frac{۶}{a}$ است؛ پس:

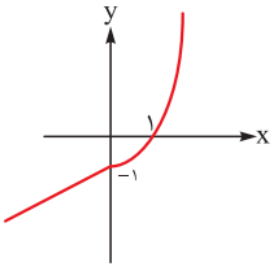
$$m=-\frac{۵}{-\frac{۱}{۲}}=۱۰$$

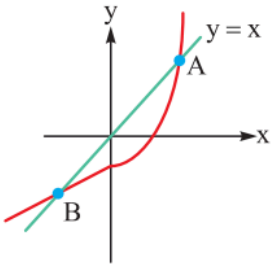
$$n=-\frac{۶}{-\frac{۱}{۲}}=۱۲$$

بنابراین حاصل $a+m+n$ برابر است با: $-\frac{۱}{۲}+۱۰+۱۲=۲۱/۵$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹۳





گام اول: نمودار تابع f به صورت مقابل است:

همان‌طور که از روی نمودار می‌بینید، تابع اکیداً صعودی است، پس با توجه به نکته، نمودار این تابع، نمودار وارون خود را روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قطع می‌کند.

گام دوم: حال برای به دست آوردن مختصات نقاط A و B یک بار ضابطهٔ بالا را با خط $y=x$ و یک بار ضابطهٔ پایین را با این خط تلاقی می‌دهیم:

ضابطهٔ بالایی:

$$x^۲-۱=x \Rightarrow x^۲-x-۱=۰ \xrightarrow{x\geq ۰} \begin{cases} x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \\ x=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \end{cases} \text{غ.ق.ق.}$$

چون $x\geq ۰$، فقط $x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول است. پس $A(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲},\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$ است.

ضابطهٔ پایینی:

$$\frac{x-۲}{۲}=x \Rightarrow x-۲=۲x \Rightarrow x=-۲$$

پس مختصات B نیز $(-۲,-۲)$ است.

گام سوم: حال خواستهٔ سؤال را که فاصلهٔ نقاط A و B از یکدیگر است، به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲} \Rightarrow AB=\sqrt{(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۲)^۲+(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۲)^۲}=\sqrt{۲(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۲)^۲}$$

$$=\sqrt{۲(\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲})^۲}=\sqrt{۲\frac{(۵+\sqrt{۵})^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{(۵+\sqrt{۵})^۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AB=\frac{۵+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹۴

$$\frac{f}{g}=\frac{ax^۳+ax+a-۱}{ax^۲+bx+c}=x \Rightarrow ax^۳+ax+a-۱=ax^۳+bx^۲+cx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۰ \\ c=۱ \\ a=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^۳+x \\ g(x)=x^۲+۱ \end{cases} \Rightarrow f(g(a))=f(g(۱))=f(۲)=۱۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹۵

می‌دانیم که عبارت زیر رادیکال همواره باید بزرگ یا مساوی صفر باشد.

نامعادلهٔ فوق را تعیین‌علامت می‌کنیم:

$$(x^۳-x)f(x)\geq ۰$$

$(x^۳-x)f(x)$: $x(x^۲-۱)$: ۰، ± ۱

$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$

پس دامنه می‌شود $R-(-۱,۰)$

$$a+b=-۱+۰=-۱$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹۶ با توجه به ضابطه، عبارت $ax^۳+bx+۱$ در $x\geq -۱$ باید نامنفی باشدبنابراین $x=-۱$ ریشه این عبارت است:

$$\xrightarrow{x=-۱} -a-b+۱=۰\Rightarrow a=۱-b$$

چندجمله‌ای را بازنویسی می‌کنیم. این چند جمله‌ای بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر است:

$$(۱-b)x^۳+bx+۱=(x+۱)\underbrace{((۱-b)x^۲+(b-۱)x+۱)}_{p}$$

عبارت p باید همواره نامنفی باشد:

$$①\ ۱-b>۰\Rightarrow b<۱$$

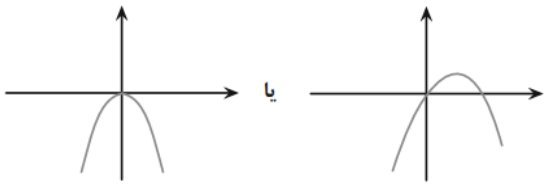
$$②\ \Delta\leq ۰\Rightarrow (b-۱)^۲-۴(۱-b)\leq ۰$$
$$\Rightarrow (b-۱)(b+۳)\leq ۰\Rightarrow -۳\leq b\leq ۱$$

دقت کنید که اگر $b=۱$ باشد، عبارت‌ها در درجهٔ صفر بوده و دامنه درست خواهد بود.

به ازای $b=-۳$ نیز ریشه عبارت p، $x=\frac{۱}{۲}$ خواهد بود که مشکلی در دامنه ایجاد نمی‌کند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹۷ در تابع فوق $c=۰$ پس حتماً از مبدأ عبور می‌کند و چون از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد پس دهانهٔ سهمی به سمت پایین است پس دو حالت برای آن متصور است.



ضریب $a=x^۲$

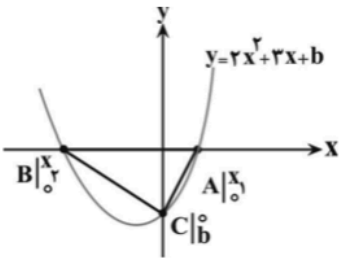
$$\begin{cases} a<۰\rightarrow \alpha-۱<۰\rightarrow \boxed{\alpha<۱} \\ b\geq ۰\rightarrow \alpha+۲\geq ۰\rightarrow \boxed{\alpha\geq -۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲\leq \alpha<۱$$

به ظاهر $\alpha=-۲,-۱,۰$ قابل قبول است اما به ازای $a=۱$ داریم:

$J=۳x\rightarrow$ از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد $\rightarrow \alpha=-۲,-۱,۰,۱$ ۴ مقدار

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹۸ مثلث ABC قائم‌الزاویه است پس $CA\perp CB$ $m_{CA}\times m_{CB}=-۱$ و داریم:



$$\frac{b-۰}{۰-x_۱}\times\frac{b-۰}{۰-x_۲}=-۱\Rightarrow\frac{b^۲}{x_۱x_۲}=-۱\Rightarrow b^۲=-x_۱x_۲=\frac{-b}{۲}\Rightarrow\begin{cases} b=۰ \\ b=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

واضح است که b صفر نیست پس $b=\frac{-۱}{۲}$ و داریم:

$$y=۲x^۲+۳x-\frac{۱}{۲}$$

$$x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{۴}\quad y_s=۲(\frac{-۳}{۴})^۲+۳(\frac{-۳}{۴})-\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۸}-\frac{۹}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۹}{۸}-\frac{۴}{۸}=\frac{-۱۳}{۸}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹۹

$$f(x+۲)=y \Rightarrow x+۲=f^{-۱}(y) \Rightarrow x=-۲+f^{-۱}(y) \Rightarrow y=-۲+f^{-۱}(x) \quad (۱)$$

$$\frac{۳g(x-۱)+۱}{g(x-۱)-۲}=y \Rightarrow ۳g(x-۱)+۱=yg(x-۱)-۲y \Rightarrow (y-۳)g(x-۱)=۲y+۱$$

$$g(x-۱)=\frac{۲y+۱}{y-۳} \Rightarrow x-۱=g^{-۱}(\frac{۲y+۱}{y-۳}) \Rightarrow x=۱+g^{-۱}(\frac{۲y+۱}{y-۳}) \; y=۱+g^{-۱}(\frac{۲x+۱}{x-۳}) \quad (۲)$$

حال داریم:

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} ۱+g^{-۱}(\frac{۲x+۱}{x-۳})=-۲+f^{-۱}(x) \Rightarrow f^{-۱}(x)=۳+g^{-۱}(\frac{۲x+۱}{x-۳})$$

حال برای یافتن $g^{-۱}(۰)$ باید $\frac{۲x+۱}{x-۳}=۰$ و لذا $x=-\frac{۱}{۲}$ باشد پس $f^{-۱}(-\frac{۱}{۲})-۳=g^{-۱}(۰)$ حال چون $f^{-۱}(۳x-\frac{۱}{۲})=۸x^{۳}+۲x-۱$ پس باید $۳x-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$ لذا $x=۰$، پس داریم $f^{-۱}(-\frac{۱}{۲})=-۱$ و لذا $g^{-۱}(۰)=-۱-۳=-۴$.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۰

توجه کنید شرط آن‌که معادلهٔ $ax^{۴}+bx^{۲}+c=۰$ دارای ۳ جواب باشد آن است که:

$$-\frac{b}{a}>۰ \;,\; c=۰$$

اکنون باید $۲^{a}-a^{۲}=۰$ و $a-۲>۰$.

حال می‌دانیم معادلهٔ $۲^{a}=a^{۲}$ دارای ۳ جواب است که $a_۱=۲$ ، $a_۲=۴$ ، $-۱<a_۳<۰$ و چون باید شرط $a>۲$ برقرار باشد، تنها $a=۴$ قابل قبول است.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۱

$$f(x)=a(x-۲)^{۲}+۳$$
$$y=۲x^{۲}+a(x-۲)^{۲}+۳+bx$$
$$=(۲+a)x^{۲}+(b-۴a)x+۴a+۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲+a=۰ & \Rightarrow \; a=-۲ \\ b-۴a=۰ & \Rightarrow \; b=-۸ \end{cases} \Rightarrow f(x)=-۲(x-۲)^{۲}+۳$$
$$f(-۸)=-۱۹۷$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۲

باتوجه به اینکه $f(۵)=۷$, $f(۹)=۱۱$ می‌توان معادلهٔ سهمی را به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=a(x-۵)(x-۹)+x+۲$$

اکنون از شرط $f(۱۰)$ خواهیم داشت:

$$a(۵)(۱)+۱۲=۳۷ \Rightarrow ۵a=۲۵ \Rightarrow a=۵$$

حال می‌توان نتیجه گرفت $f(x)=۵(x-۵)(x-۹)+x+۲$، پس:

$$f(۰)=۵(-۵)(-۹)+۲=۲۲۷$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۳

$$D_{f^{-۱}og}=\{x \in D_g \mid g(x) \in D_{f^{-۱}}\}$$
$$=\{x \in [۰,۶] \mid \sqrt{۶x-x^{۲}} \le ۳\}$$
$$=\{۰ \le x \le ۶ \mid x^{۲}-۶x+۹ \ge ۰\}$$
$$=[۰,۶]$$

$$\begin{cases} D_f=(-\infty,۶] \\ R_f=(-\infty,۳] \end{cases} \qquad D_g=[۰,۶]$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۴

$$۱) \; y=(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)=x^{۲}-۴x+۳ \quad ۲) \; y=x^{۲}+۴x+۳=g(x) \quad ۳) -g(x)=-x^{۲}-۴x-۳=x^{۲}+۲x \Rightarrow ۲x^{۲}+۶x+۳=۰$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=-۳$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۵

$$f^{-1}(x)=\frac{۶-x}{۳} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{۶-x}{۳}\right)=x \rightarrow x^۲-۹x-۳۶=۰ \begin{cases} x=۱۲ \\ x=-۳ \end{cases} \\ \frac{۶-x}{۳} \le ۲ \rightarrow x \ge ۰ \end{cases} \qquad y=\frac{۶-x}{۳} \xrightarrow{x=۱۲} y=\frac{۶-۱۲}{۳}=-۲$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۶

باتوجه به اینکه این سهمی دارای ماکزیمم است نتیجه می‌شود «ضریب $x^۲$» باید منفی باشد؛ پس داریم:

$$a-۳<۰ \Rightarrow a<۳ \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a=۱ \text{ یا } a=۲$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر $a=۱$ و $a=۲$ در هر حالت مقدار ماکزیمم سهمی $\left(\frac{-\Delta}{۴a}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a=۱ : f(x)=-۲x^۲+۲x+۵ \Rightarrow y_{max}=\frac{-(۴+۴۰)}{-۸}=\frac{۱۱}{۲}$$

$$a=۲ : f(x)=-x^۲+۴x+۵ \Rightarrow y_{max}=\frac{-(۱۶+۲۰)}{-۴}=۹$$

پس مجموع مقادیر متمایز y_{max} برابر است با:

$$\frac{۱۱}{۲}+۹=\frac{۲۹}{۲}=۱۴٫۵$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۷

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \quad , \quad f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$a+d=۰ \longrightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$$

$$f(a-۳f(۳))=f(۵)$$

باتوجه به هموگرافیک بودن تابع، تابع یک به یک می‌باشد؛ پس داریم:

$$a-۵=f(۳) \Rightarrow a-۵=\frac{۳}{۱}$$

$$\Rightarrow a=۸$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۸

مخرج باید یک ریشه داشته باشد که در دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت ۱: مخرج درجه ۱ باشد، یعنی ضریب $x^۲$ صفر باشد:

$$m-۲=۰ \rightarrow m=۲ \rightarrow \text{مخرج کسر} : ۴x+۴=۰ \rightarrow x=-۱ \xrightarrow{\text{دامنه}} \mathbb{R}-\{-۱\}$$

حالت ۲: دلتای مخرج برابر صفر باشد و مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=۰ \rightarrow ۴^۲-۴(۴)(m-۲)=۰ \rightarrow m-۲=۱ \rightarrow m=۳$$

$$\rightarrow \text{مخرج کسر} : x^۲+۴x+۴=۰ \rightarrow x=-۲ \xrightarrow{\text{دامنه}} \mathbb{R}-\{-۲\}$$

پس مقادیر ممکن برای a، ۱- و ۲- است و جمع آنها ۳- می‌شود.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۰۹ باتوجه به مخرج کسر $g(x)$ که همان $(x-۳)^۳$ است پس دامنهٔ هر دو تابع باید $\mathbb{R}-\{۳\}$ باشد، یعنی مخرج f هم باید $(x-۳)^۲$ باشد و داریم:

$$(x-۳)^۲=x^۲-۶x+۹=x^۲+ax+b\rightarrow\begin{cases}a=۳\\b=۹\end{cases}$$

از طرفی از مساوی هم قرار دادن ضابطه‌های g,f داریم:

$$\frac{۲x^۲-۳x-c}{(x-۳)^۳}=\frac{۲x+۳}{(x-۳)^۲}$$

$$\xrightarrow{\times(x-۳)^۳}۲x^۲-۳x-c=(۲x+۳)(x-۳)=۲x^۲-۳x-۹$$

$$\rightarrow c=۹$$

پس داریم:

$$abc=۳\times۹\times۹=۳^۵$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۰ باید اعداد ۱− و ۲ ریشه‌های مخرج باشند:

$$\begin{cases}x=-۱\rightarrow ۳\times|-۱|+a(-۱)+b=۰\rightarrow ۳-a+b=۰\xrightarrow{\times۲}۶-۲a+۲b=۰\\x=۲\rightarrow ۳\times۲+a(۲)+b=۰\rightarrow ۶+۲a+b=۰\end{cases}\xrightarrow{+}۱۲+۳b=۰\rightarrow ۳b=-۱۲$$

$$\rightarrow b=-۴\xrightarrow{\text{جایگذاری}}a=-۱$$

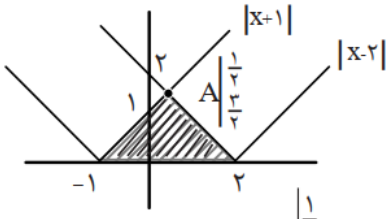
حالا تابع $g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=\sqrt{۲a-x}+۴b=\sqrt{-۲-x}-۱۶$$

که دامنه g برابر $[-۲,-\infty)$ و برد آن $[-۱۶,+\infty)$ است و تمام اعداد طبیعی را شامل می‌شود.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۱ در ابتدا نمودارهای $|x+۱|$ و انتقال یافتهٔ آن یعنی $|(x-۳)+۱|=|x-۲|$ را با هم رسم می‌کنیم و نقطه برخوردشان را هم پیدا می‌کنیم:



$$x+۱=۲-x\rightarrow x=\frac{۱}{۲}\rightarrow A\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\\frac{۳}{۲}\end{matrix}\right.$$

پس مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times۳=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۲ در ابتدا دقت می‌کنیم که اگر $-۱\le x\le ۱$ باشد داریم:

$$-۲\le x-۱\le ۰$$

پس برای $y=f(\frac{x}{۲}-۱)+۱$ هم باید $\frac{x}{۲}-۱$ در بازهٔ $[-۲,۰]$ باشد:

$$-۲\le\frac{x}{۲}-۱\le ۰\rightarrow -۱\le\frac{x}{۲}\le ۱\rightarrow -۲\le x\le ۲$$

پس $[-۲,۲]$ دامنهٔ تابع جدید است.

از طرفی طبق گفتهٔ سؤال اگر برد $۲f(x-۱)$ در بازهٔ $[-۲,۴]$ باشد:

$$-۲\le ۲f\le ۴\xrightarrow{\div۲}-۱\le f\le ۲\xrightarrow{+۱}۰\le f+۱\le ۳$$

پس برد تابع جدید هم $[۰,۳]$ است و حالا اشتراک بازه‌های $[-۲,۲]$ و $[۰,۳]$ برابر $[۰,۲]$ است که اعداد صحیح ۲،۱،۰ در آن قرار دارد.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۳ باتوجه به اینکه f.g در ۲ و ۱− تعریف نشده، پس ریشه‌های مخرج f هستند. پس $a=-۲$ و $a+۲=۰$ است. یعنی تابع f به صورت $\frac{-۳x+۱}{(x+۱)(x-۲)}$ است و چون f.g یک تابع خطی با عرض از مبدأ $-\frac{۱}{۲}$ است، پس g(x) به صورت $\frac{(x+۱)(x-۲)}{-۲}$ است که ضرب f.g خط $\frac{-۳x+۱}{-۲}$ می‌باشد.

حالا g(f(a+۲)) را حساب می‌کنیم:

$$a=-۲\rightarrow f(a+۲)=f(۰)=-\frac{۱}{۲}\rightarrow g\big(f(۰)\big)=g(-\frac{۱}{۲})=\frac{(-\frac{۱}{۲}+۱)(-\frac{۱}{۲}-۲)}{-۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\times-\frac{۵}{۲}}{-۲}=\frac{۵}{۸}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۴ در ابتدا fof را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}x\geq ۲\rightarrow ۲x^{۲}-۴x+۳=۲(x-۱)^{۲}+۱\geq ۳\rightarrow y_{۱}\geq ۳\\ x<۲\rightarrow ۳x-۷<-۱\rightarrow y_{۲}<-۱\end{cases}$$

یعنی برد ضابطه اول f برابر $[۳,+\infty)$ و برد ضابطه دوم f برابر $(-\infty,-۱]$ است، پس برای تشکیل fof داریم:

$$fof(x)=\begin{cases}۲\big(f(x)-۱\big)^{۲}+۱ & x\geq ۲\\ ۳f(x)-۷\ x<۲ & x<۲\end{cases}\rightarrow fof(x)=\begin{cases}۲\Big(۲(x-۱)^{۲}+۱-۱\Big)^{۲}+۱ & x\geq ۲\\ ۳(۳x-۷)-۷ & x<۲\end{cases}$$

که اگر ضابطه‌ها را ساده کنیم داریم:

$$fof(x)=\begin{cases}۸(x-۱)^{۴}+۱ & x\geq ۲\\ ۹x-۲۸ & x<۲\end{cases}$$

ضابطهٔ پایینی که هیچگاه ۷۳ نمی‌شود و در ضابطه بالایی داریم:

$$۸(x-۱)^{۴}+۱=۷۳\rightarrow ۸(x-۱)^{۴}=۷۲\rightarrow(x-۱)^{۴}=۹\rightarrow x-۱=\pm\sqrt{۳}$$

$$\rightarrow x=۱\pm\sqrt{۳}$$

که باتوجه به $x\geq ۲$ فقط $x=۱+\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۵ چون g(x) همانی است، پس $g(۰)=۰$ یعنی $c=۰$ است. حالا از صورت کسر x فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{x(۲x^{۲}-ax+b)}{f(x)}=x$$

پس f(x) همان $۲x^{۲}-ax+b$ است که ریشه‌های آن ۱ و ۲ می‌باشد و در دامنه نیست، پس داریم:

$$f(x)=۲(x-۱)(x-۲)=۲(x^{۲}-۳x+۲)=۲x^{۲}-۶x+۴\rightarrow a=۶,b=۴$$

و در نتیجه $ab=۲۴$ است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۶ ابتدا ضابطه f را با تعیین علامت قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(a+۲)x-۹ & x\geq ۵\\ (a-۲)x+۱۱ & x<۵\end{cases}$$

و برای آنکه یکنوای غیراکید باشد باید به یکی از حالت‌های ↗ یا ↘ باشد یعنی یکی از شاخه‌ها باید ثابت باشد، پس $a=۲$ یا $a=-۲$.

$$\rightarrow a^{۲}=۴\rightarrow f(a^{۲}-۴)=f(۰)=۱۱$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۷ از رابطهٔ $h(۴)=۳۲$ نتیجه می‌گیریم $h^{-۱}(۳۲)=۴$. حالا دقت کنید که اگر $x^۳+۵=۳۲$ باشد، پس $x=۳$ است. پس در رابطهٔ $g(۲x)=h^{-۱}(x^۳+۵)$، $x=۳$ را قرار می‌دهیم:

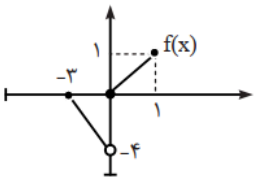
$$g(۶)=h^{-۱}(۳۲)=۴\rightarrow g(۶)=۴$$

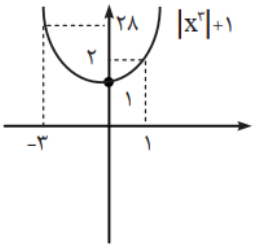
حالا اگر در رابطهٔ $f(x)=۳+۲g(x+\sqrt{x})$ مقدار $y=۱۱$ را قرار دهیم، داریم:

$$f(x)=۱۱=۳+۲g(x+\sqrt{x})=۱۱\rightarrow g(x+\sqrt{x})=۴\rightarrow x+\sqrt{x}=۶\rightarrow x=۴\rightarrow f(۴)=۱۱\rightarrow f^{-۱}(۱۱)=۴$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۸ باتوجه به شکل‌های $f(x)$ و $|x^۳|+۱$:





می‌بینیم که هر دو تابع در قسمت $x<۰$ نزولی و هر دو در قسمت $x>۰$ صعودی هستند. پس در هر قسمت برای محاسبهٔ برد، مقدار تابع برای ابتدا و انتهای بازه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}-۳\le x<۰\rightarrow -۳<y\le ۲۸\\ ۰\le x\le ۱\rightarrow ۱\le y\le ۳\end{cases}\xrightarrow[\text{اجتماع می‌گیریم}]{\cup}\text{برد تابع}=(-۳,۲۸]$$

پس $a=۳$ و $b=۲۸$ و $b-a=۲۵$ است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱۹ دو شرط زیر را بررسی می‌کنیم:

الف) باید رأس سهمی در بازهٔ $(-۲,+\infty)$ نباشد:

$$x_s=-\frac{a}{۴}\le -۲\rightarrow a\ge ۸$$

ب) ریشه سهمی هم نباید در $(-۲,+\infty)$ باشد، یعنی به ازای $x=-۲$ مقدار تابع مثبت باشد:

$$۲(-۲)^۲+a(-۲)+۶\ge ۰\rightarrow -۲a+۱۴\ge ۰\rightarrow ۲a\le ۱۴\rightarrow a\le ۷$$

که اشتراک این دو شرط تهی است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۰ ضابطه f را به صورت $y=(x-۱)^۲-۲$ می‌نویسیم و داریم:

$$y+۲=(x-۱)^۲\xrightarrow{x\le ۰}\sqrt{y+۲}=|x-۱|=۱-x$$

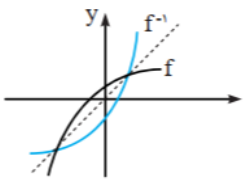
$$\Rightarrow x=۱-\sqrt{y+۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۲}+۱$$

پس $b=۲$ و $c=۱$ و $a=-۱$ و داریم:

$$b+c-a=۲+۱+۱=۴$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۱ باتوجه به شکل روبه‌رو $f^{-۱}$ در فاصله -۲ تا ۱ زیر $y=x$ قرار می‌گیرد.



پس دامنه رادیکال با شرط $x\ge f^{-۱}(x)$ به صورت $[-۲,۱]$ است که در اعداد صحیح ۴ عضو $-۲,-۱,۰,۱$ را دارد.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۲ می‌دانیم وارون تابع $\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس داریم:

$$g^{-1}(x)=\frac{۲x-۳}{۱x+۰}\Rightarrow g(x)=\frac{-۳}{x-۲}$$

$$\Rightarrow f(x)=۱-xg(x)=۱-x(\frac{-۳}{x-۲})=۱+\frac{۳x}{x-۲}=\frac{۴x-۲}{x-۲}$$

و ضابطه وارون آن $y=\frac{۲x-۲}{x-۴}$ خواهد بود.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۳ چون از شرط $(a-x)(۲+bx)\geq ۰$ جواب بازهٔ $\left[-\frac{۳}{۲},۲\right]$ شده است، پس ضریب $x^۲$ منفی بوده و بنابراین $b>۰$ است. پس $-\frac{۳}{۲}$ حتماً ریشه $۲+bx$ است و داریم:

$$۲+(-\frac{۳}{۲}b)=۰\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}$$

و همچنین ریشه $a-x$ باید ۲ باشد، پس $a=۲$.

بنابراین:

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{۴}{۳}}{۲}=\frac{۲}{۳}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۴ مخرج کسر در بازهٔ $(۰,۲)$ فقط یک ریشه دارد:

$$۲+a\sin\pi x=۰\Rightarrow \sin\pi x=-\frac{۲}{a}$$

این معادله به شرطی فقط یک ریشه داردکه $-\frac{۲}{a}=\pm ۱$ باشد و برای آن که حد موجود باشد باید ریشهٔ صورت هم باشد.

حالت اوّل: $a=۲$

$$\sin\pi x=-۱\Rightarrow \pi x=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{(۲x+۱)^۲}{۲+۲\sin\pi x}$$

در $x=\frac{۳}{۲}$ صورت برابر صفر نیست.

حالت دوم: $a=-۲$

$$\sin\pi x=۱\Rightarrow \pi x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{(-۲x+۱)^۲}{۲-۲\sin\pi x}$$

در $x=\frac{۱}{۲}$ صورت کسر برابر صفر است پس:

$$a+b=\frac{۱}{۲}-۲+\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۵ اوّلاً gof نزولی اکید و f صعودی اکید است، پس g نزولی اکید است. (رد گزینه «۳» و «۴»)

ثانیاً:

$$\left.\begin{matrix}gof(۲)=۰\\ f(۲)=۶\end{matrix}\right\}\Rightarrow g(۶)=۰$$ رد گزینه «۲»

پس g نزولی اکید و $g(۶)=۰$ خواهد بود. بنابر این گزینه «۱» درست است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۶

$$f(x)=۴^x+۴\times۲^x \Rightarrow f(x)=(۲^x)^۲+۴\times۲^x=(۲^x+۲)^۲-۴$$

$$\Rightarrow y=(۲^x+۲)^۲-۴ \Rightarrow |۲^x+۲|=\sqrt{y+۴} \xrightarrow{۲^x+۲>۰} ۲^x+۲=\sqrt{y+۴}$$

$$\Rightarrow ۲^x=\sqrt{y+۴}-۲ \Rightarrow x=\log_۲\left(\sqrt{y+۴}-۲\right)$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} f^{-۱}(x)=\log_۲(\sqrt{x+۴}-۲)=\log_۲ g(x)$$

$$\Rightarrow g(x)=\sqrt{x+۴}-۲ \Rightarrow g(۵)=۱$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۷

$$f(x)=ax+b \Rightarrow f(x)-۴x=(a-۴)x+b$$

چون دامنه $y=\sqrt{f(x)-۴x}$ مجموعه $\mathbb{R}$ است پس $a=۴$ و $b\geq ۰$، از طرفی:

$$۲x+f(x)=۲x+۴x+b=۶x+b \Rightarrow ۲x+f(x)\geq ۰ \Rightarrow ۶x+b\geq ۰ \Rightarrow x\geq -\frac{b}{۶} \xrightarrow{D=[-۲,+\infty)}$$

$$-\frac{b}{۶}=-۲ \Rightarrow b=۱۲ \Rightarrow f(x)=۴x+۱۲$$

$$f(۳)=۲۴$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۸

$$f(x-۱)+۲x=\begin{cases} x & ۰\leq x\leq ۱ \\ ۱ & x\geq ۱ \end{cases}$$

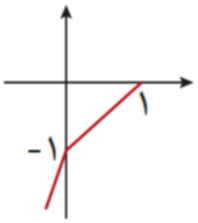
$$f(x-۱)=\begin{cases} -x & ۰\leq x\leq ۱ \\ ۱-۲x & x\geq ۱ \end{cases}$$

به جای x قرار می‌دهیم $x+۱$ و داریم:

$$f(x)=\begin{cases} -(x+۱) & ۰\leq x+۱\leq ۱ \\ ۱-۲(x+۱) & x+۱\geq ۱ \end{cases}$$

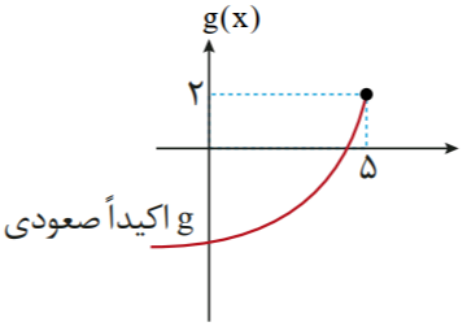
$$f(x)=\begin{cases} -x-۱ & -۱\leq x\leq ۰ \\ -۲x-۱ & x\geq ۰ \end{cases}$$

$$f(-x)=\begin{cases} x-۱ & ۰\leq x\leq ۱ \\ ۲x-۱ & x\leq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{نمودار تابع } f(-x)}$$



(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲۹



$f(x)=۴-\sqrt{۲-x} \xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} y=۴-\sqrt{۲-(x-۳)}$

$g(x)=۲-\sqrt{۵-x} \xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} y=۴-\sqrt{۲-(x-۳)}-۲$

g تابعی صعودی اکید با دامنهٔ تعریف $(-\infty,۵]$ است.

تابع gog به شرطی تعریف شده است که $g(x)\in D_g$

$۲-\sqrt{۵-x}\le ۵\Rightarrow \sqrt{۵-x}\ge -۳\Rightarrow$ بدیهی است

$$D_{gog}=\{\overbrace{x\in D_g}^{x\le ۵}\mid \overbrace{g(x)\in D_g}^{R}\}\Rightarrow D_g=(-\infty,۵]\Rightarrow g(g(x))\ge g(-۴)\xrightarrow{g\text{ اکیداً صعودی}}$$

$g(x)\ge -۴\Rightarrow ۲-\sqrt{۵-x}\ge -۴$

$\sqrt{۵-x}\le ۶\Rightarrow ۵-x\le ۳۶\Rightarrow x\ge -۳۱$

$-۳۱\le x\le ۵\Rightarrow$ تعداد اعداد صحیح $=۵-(-۳۱)+۱=۳۷$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

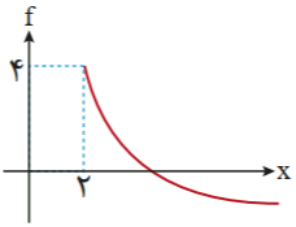
۲۳۰

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد آن‌گاه:

$y=f^{-۱}of(x)=x \quad و \quad x\in D_f$

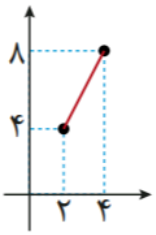
$y=fof^{-۱}(x)=x \quad و \quad x\in D_f{}^{-۱}=R_f$

$D_f=[۲,+\infty) \quad , \quad R_f=(-\infty,۴]$



$y=fof^{-۱}(x)+f^{-۱}of(x)=۲x \quad , \quad ۲\le x\le ۴$

$D=D_f\cap R_f=[۲,۴]$



(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳۱

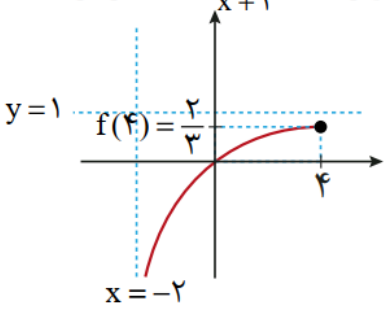
$$g(x)=۲^x+\frac{۴}{۲^x}\xrightarrow{۲^x>۰}$$

می‌دانیم هرگاه $a,b>۰$ آن‌گاه $a+b\geq ۲\sqrt{ab}$:

$$۲^x+\frac{۴}{۲^x}\geq ۲\sqrt{۲^x\times\frac{۴}{۲^x}}\Rightarrow g(x)\geq ۴$$
$$R_g=[۴,+\infty)$$

با توجّه به نمودار f داریم:

f در بازه $[۴,+\infty)$ صعودی اکید است به‌طوریکه برای تعیین برد fog کافی است برد تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{x}{x+۲}$ را در دامنه $[۴,+\infty)$ حساب کنیم.

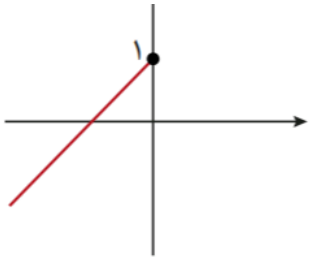


$$g(x)\geq ۴\Rightarrow f(۴)\leq f(g(x))<۱$$
$$\frac{۲}{۳}\leq fog(x)<۱\Rightarrow R_{fog}=\left[\frac{۲}{۳},۱\right)$$

نکته: مطابق نمودار، برد تابع fog درباره $[۴,+\infty)$ به‌صورت $[f(۴),۱)$ یا $[\frac{۲}{۳},۱)$ است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳۲



$$f(x)=\begin{cases}۲+x-۱ & x\leq ۰\\ x^۲+۲x+a & x>۰\end{cases}=\begin{cases}x+۱ & x\leq ۰\\ (x+۱)^۲+a-۱ & x>۰\end{cases}$$

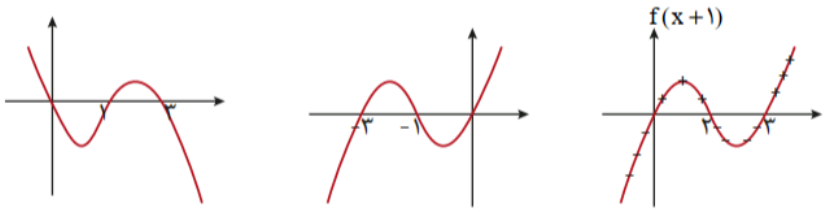
کافی است $a-۱+۱\geq ۱$، یعنی $a\geq ۱$:

زیرا $y=x^۲+۲x+a$ برای $x>۰$ خود یک به یک است. تنها کافی است که ضابطه‌های متفاوت که هر کدام به تنهایی یک به یک هستند برد مشترک نداشته باشند.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳۳ با استفاده از تبدیلات زیر نمودار تابع $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم:

$$y=f(4-x)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y\text{ها}}f(x+4)\xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}}f(x+1)$$



$$y=\sqrt{-xf(x+1)}\Rightarrow D=\underbrace{-xf(x+1)}_{P}\geq 0$$

x		0		2		3	
$f(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$-x$	$+$	0	$-$		$-$		$-$
P	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$D_y=\{0\}\cup[2,3]$$

دامنه شامل ۳ عدد صحیح ۰ و ۲ و ۳ است و یک را شامل نمی‌شود.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳۴

$$y=\frac{2x}{x+1}\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}}y=\frac{2(x-2)}{(x-2)+1}\xrightarrow{k\text{ واحد در راستای محور عرض‌ها}}y=\frac{2x-4}{x-1}+k$$

$$y=\frac{(2+k)x-4-k}{x-1}$$

قرار است نمودار به‌دست آمده بر نیمساز ناحیه اوّل مماس باشد.

پس معادله حاصل از تلاقی آنها ریشه مضاعف دارد، یعنی:

$$\frac{(2+k)x-4-k}{x-1}=x\Rightarrow(2+k)x-4-k=x^2-x$$

$$x^2-(3+k)x+4+k=0\xrightarrow{\text{معادله برخورد، ریشه مضاعف دارد}}$$

$$\Delta=0\Rightarrow k^2+6k+9-16-4k=0\Rightarrow k^2+2k-7=0\Rightarrow k=-1\pm2\sqrt{2}\xrightarrow{x_s>0\Rightarrow k>-3}k=-1+2\sqrt{2}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳۵

$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\xrightarrow{\alpha=cx+\frac{\pi}{۴}}۱+\cot^۲\left(cx+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{\sin^۲\left(cx+\frac{\pi}{۴}\right)}\Rightarrow$$

$$y=a+b\sin^۲\left(cx+\frac{\pi}{۴}\right)\xrightarrow{\left(\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\alpha)\right)}a+\frac{b}{۲}\left(۱-\cos\left(۲cx+\frac{\pi}{۲}\right)\right)\Rightarrow$$

$$y=a+\frac{b}{۲}+\frac{b}{۲}\sin ۲cx$$

چون نمودار بعد از $x=۰$ نزولی است، پس $bc<۰$. فرض کنیم $c>۰$ و $b<۰$:

$$T=\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{|۲c|}\Rightarrow|c|=۲\xrightarrow{c>۰}c=۲$$

$$\begin{matrix}\max=۱\\ \min=-۲\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{b}{۲}+\left|\frac{b}{۲}\right|=۱\\ a+\frac{b}{۲}-\left|\frac{b}{۲}\right|=-۲\end{cases}\xrightarrow{b<۰}\begin{cases}a=۱\\ a+b=-۲\xrightarrow{a=۱}b=-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۱-۳=-۲=-c$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

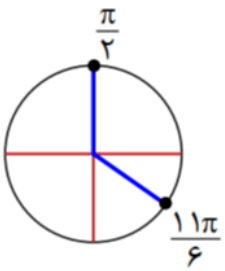
۲۳۶

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)=۱-\cos\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۶}-x\right),\left(\frac{\pi}{۶}-x\right)+\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow[\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin\beta=\cos\alpha]{\text{۲کمان داده‌شده متمم هستند}}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)\Rightarrow ۲\sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)=۱$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x+\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$



$$x=\frac{\pi}{۲},x=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

معادله دو جواب در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد:

پس: $\alpha=\frac{۱۱\pi}{۶}$

$$A=\sin\left(۷۳\pi-\frac{\pi}{۶}\right)-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\tan\left(۹\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=$$

$$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{۶}\right)-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\tan\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cot\alpha\xrightarrow{\alpha=\frac{۱۱\pi}{۶}}\sin\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\underbrace{\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۶})}_{-\cot\frac{\pi}{۶}}$$

$$A=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\left(-\sqrt{۳}\right)=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳۷ در نقطه $x=۱$ ، مخرج کسر بعد از ساده شدن، ریشهٔ مضاعف دارد. پس:

$$ax^۳+bx^۲+cx+۲=a(x-۱)^۳$$
$$\Rightarrow ax^۳+bx^۲+cx+۲=ax^۳-۳ax^۲+۳ax-a$$

پس $a=-۲$ است.

$$f(x)=\frac{x-۱}{-۲(x-۱)^۳}=\frac{۱}{-۲(x-۱)^۲}$$
$$f(a)=f(-۲)=\frac{۱}{-۱۸}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳۸

$$fof(x)=۴x+۸$$
$$f(x)=ax+b$$
$$f(ax+b)=a(ax+b)+b=۴x+۸\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲$$
$$ab+b=۸\begin{cases}\xrightarrow{a=۲} b=\frac{۸}{۳}\\ \xrightarrow{a=-۲} b=-۸\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=۲x+\frac{۸}{۳}\ (I)\\ f(x)=-۲x-۸\ (II)\end{cases}$$
$$۳f^۲(x+۱)f'(x+۱)=(۲x+g'(x))g'\left(x^۲+\underbrace{g(x)}_{-۲}\right)$$
$$\boxed{x=۲}$$
$$۳f^۲(۳)f'(۳)=(۴+g'(۲))(g'(۲))$$

$$g^{۲-}(۲)+۴g'(۲)-۳f^۲f'=۰\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow[(I)]{\Delta>۰} S=-۴\\ \xrightarrow[(II)]{\Delta<۰} f^۲f'<۰\end{cases}\Rightarrow S=-۴$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

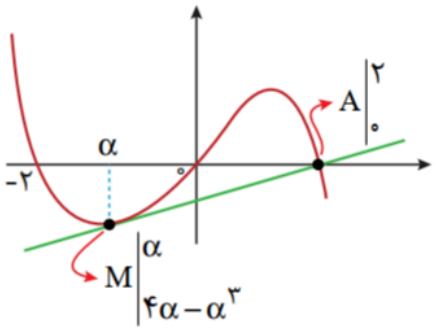
۲۳۹

$$f(x)=x\sqrt[۳]{۳+\frac{۵}{x}}$$
$$f'(x)=\sqrt[۳]{۳+\frac{۵}{x}}-\frac{۵}{x^۲}\cdot\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{\left(۳+\frac{۵}{x}\right)^۲}}\cdot x$$

$$f'(۱)=۲-۵\times\frac{۱}{۱۲}=۲-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۹}{۱۲}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۴۰



$$f(x)=۰\Rightarrow A\begin{vmatrix}x=۲\\x=-۲\\x=۰\end{vmatrix}\Rightarrow x=۲\Rightarrow A\Big|_{۰}^{۲}$$

فرض کنیم مماس در نقطه $M\Big|_{۴\alpha-\alpha^۳}^{\alpha}$ رسم شده و امتداد مماس از $A\Big|_{۰}^{۲}$ عبور کرده است در نتیجه:

$$m_{AM}=f'(\alpha)$$

$$\Rightarrow\frac{۴\alpha-\alpha^۳-۰}{\alpha-۲}=۴-۳\alpha^۲$$

$$\Rightarrow ۴\alpha-\alpha^۳=۴\alpha-۳\alpha^۳-۸+۶\alpha^۲$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^۳-۶\alpha^۲+۸=۰\Rightarrow\alpha^۳-۳\alpha^۲+۴=۰\Rightarrow(\alpha+۱)(\alpha^۲-۴\alpha+۴)=۰$$

$$\Rightarrow(\alpha+۱)(\alpha-۲)^۲=۰$$

$$\alpha<۰\Rightarrow\alpha=-۱$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۴۱

$$y=x^۳+mx^۲+۱۲x+m$$

$$y'=۳x^۲+۲mx+۱۲$$

$$y'\geq۰\Rightarrow\Delta\leq۰\Rightarrow ۴m^۲-۱۴۴\leq۰\Rightarrow m^۲\leq۳۶\Rightarrow|m|\leq۶$$

$$\Rightarrow-۶\leq m\leq۶$$

پس برای m، ۱۳ جواب صحیح وجود دارد.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۴۲ راه اول: **گام اول**: رأس سهمی را پیدا کنیم:

$$y = x^۲ - ۲x \Rightarrow x_S = \frac{-b}{۲a} = -\frac{(-۲)}{۲(۱)} = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y_S = -۱ \Rightarrow S(۱,-۱)$$

گام دوم: رأس سهمی را نسبت به مبدأ مختصات و سپس خط $x = ۲$ قرینه می‌کنیم تا به رأس سهمی جدید برسیم:

$$S(۱,-۱) \xrightarrow[\substack{x \to -x \\ y \to -y}]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} S'(-۱,۱) \xrightarrow[x \to ۴-x]{\text{قرینه نسبت به } x=۲} S''(۵,۱)$$

پس:

$$x_{S''} + y_{S''} = ۵ + ۱ = ۶$$

راه دوم: می‌خواهیم معادلهٔ سهمی جدید را هم پیدا کنیم. برای این کار:

گام اول: ابتدا در معادلهٔ سهمی $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$ را قرار می‌دهیم تا نسبت به مبدأ قرینه شود:

$$y = x^۲ - ۲x \xrightarrow[y \to -y]{x \to -x} -y = (-x)^۲ - ۲(-x) = x^۲ + ۲x \Rightarrow y = -x^۲ - ۲x$$

گام دوم: سپس در معادلهٔ جدید، $x \to ۴ - x$ را قرار می‌دهیم تا نسبت به خط $x = ۲$ قرینه شود:

$$y = -x^۲ - ۲x \xrightarrow{x \to ۴-x} y = -(۴-x)^۲ - ۲(۴-x)$$

$$= -(x^۲ - ۸x + ۱۶) - ۸ + ۲x = -x^۲ + ۱۰x - ۲۴$$

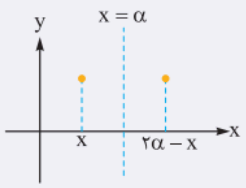
گام سوم: رأس این سهمی جدیدتر را پیدا می‌کنیم:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = -\frac{۱۰}{۲(-۱)} = ۵ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y_S = -۵^۲ + ۱۰(۵) - ۲۴ = ۱ \Rightarrow S(۵,۱)$$

و مجموع طول و عرض رأس سهمی جدید می‌شود:

$$۵ + ۱ = ۶$$

نکته برای قرینه‌کردن منحنی نسبت به خط $x = \alpha$ باید x را به $۲\alpha - x$ تبدیل کرد.



(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴۳ راه اول: می‌دانیم خط $y = x$ و خط‌های $y = -x + b$، وارون خود هستند، پس در این خط‌ها $fof(x) = x$ است؛ پس در بین گزینه‌ها تابع همانی و خط با شیب -۱ را نمی‌خواهیم و جواب ۴ را انتخاب می‌کنیم.

راه دوم: **گام اول**: در خط $y = ax + b$ تابع fof برابر است با:

$$y = a(ax + b) + b = a^۲x + ab + b$$

گام دوم: اگر fof برابر x شود، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۱ \\ ab + b = ۰ \end{cases}$$

گام سوم: پس دو حالت داریم:

$$\begin{cases} a = ۱ \ , \ ۲b = ۰ \Rightarrow y = x \\ a = -۱ \ , \ ۰ = ۰ \Rightarrow y = -x + b \end{cases}$$

یعنی $y = x$ و $y = -x + b$ جواب نیستند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴۴ راه اول: **گام اول**: اول از رابطهٔ $g(x)=\frac{۳f(x)}{۱-f(x)}$، باید $f(x)$ را به دست آوریم:

$$g(x)=\frac{۳f(x)}{۱-f(x)} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} g(x)-g(x)f(x)=۳f(x) \xrightarrow{\text{مرتب}}$$

$$g(x)=۳f(x)+g(x)f(x)=(۳+g(x))f(x) \xrightarrow{f(x)\text{ را تنها کنیم.}} f(x)=\frac{g(x)}{g(x)+۳}$$

گام دوم: برای ساختن $(fog^{-۱})(x)=f(g^{-۱}(x))$ باید در $f(x)$ به جای xها، $g^{-۱}(x)$ را قرار دهیم:

$$fog^{-۱}(x)=f(g^{-۱}(x))=\frac{g(g^{-۱}(x))}{g(g^{-۱}(x))+۳} \xrightarrow{g(g^{-۱}(x))=x} \frac{x}{x+۳}$$

گام سوم: بالاخره $x-\frac{x}{fog^{-۱}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{\frac{x}{x+۳}}-x=x+۳-x=۳$$

راه دوم: $g(x)=\frac{۳f(x)}{۱-f(x)}$ در واقع ترکیب دو تابع $h(x)=\frac{۳x}{۱-x}$ و $f(x)$ است:

$$g(x)=h(f(x))$$

گام اول: با فرمول وارون تابع مرکب، این تابع را وارون می‌کنیم:

$$g^{-۱}(x)=f^{-۱}(h^{-۱}(x))$$

گام دوم: $f(g^{-۱}(x))$ را حساب می‌کنیم:

$$f(g^{-۱}(x))=\underbrace{f(f^{-۱}}_{\text{همانی}}(h^{-۱}(x)))=h^{-۱}(x)$$

گام سوم: وارون h را با قانون هموگرافیک به دست می‌آوریم:

$$h^{-۱}(x)=\frac{-x}{-x-۳}=\frac{x}{x+۳}$$

گام چهارم: مشابه گام سوم در راه اول عمل می‌کنیم.

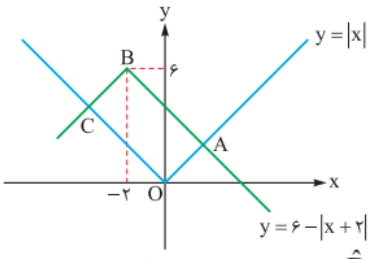
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴۵ **گام اول**: شکل را ببینید.

ضابطهٔ تابع انتقال‌یافته $y=-|x+۲|+۶$ است.

دو واحد به چپ ↑

↓ قرینه نسبت به محور x — ↓ شش واحد به بالا



گام دوم: با انتقال و قرینه‌کردن نسبت به محور x، شیب و زاویه تغییر نمی‌کند؛ پس در تابع جدید هم $\hat{B}=۹۰^\circ$ و شکل بین دو نمودار، یک مستطیل است. برای پیداکردن مساحت آن به طول OA و OC نیاز داریم.

گام سوم: A نقطهٔ برخورد شاخه‌های سمت راست دو نمودار است:

$$x>۰ \Rightarrow |x|=x \text{ و } ۶-|x+۲|=۶-(x+۲)=۴-x$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} x=۴-x \Rightarrow x_A=۲ \Rightarrow A(۲,۲)$$

گام چهارم: C در محل برخورد شاخهٔ سمت چپ دو نمودار قرار دارد:

$$x<-۲ \Rightarrow |x|=-x \text{ و } ۶-|x+۲|=۶+x+۲=۸+x$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} -x=۸+x \Rightarrow x_C=-۴ \Rightarrow C(-۴,۴)$$

گام پنجم: طول OA و OC به ترتیب $\sqrt{۲^۲+۲^۲}$ و $\sqrt{(-۴)^۲+۴^۲}$ است و مساحت می‌شود:

$$S=\sqrt{۳۲}\times\sqrt{۸}=۱۶$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴۶ **گام اول:** ضابطهٔ تابع خطی f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم و چون f نزولی است، a باید منفی باشد.

گام دوم: تابع $y=2x-f(x)=g(x)$ به صورت «ص = ن − ص» یک تابع اکیداً صعودی است.

پس برد آن با دامنهٔ $[4,6]$ بازهٔ $[g(4),g(6)]$ است و داریم:

$$\begin{matrix} g(4)=3=2(4)-(4a+b) \\ g(6)=9=2(6)-(6a+b) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a+b=5 \\ 6a+b=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=-1 \\ b=9 \end{cases}$$

پس:

$$f(x)=-x+9$$

گام سوم: در تابع $y=x+f(3x)$ دامنه به صورت $[\frac{4}{3},\frac{6}{3}]$ است، چون باید xهای f را بر ۳ تقسیم کنیم؛ پس داریم:

$$y=x+f(3x),\ \frac{4}{3}\le x\le 2$$

گام چهارم: با جای‌گذاری ضابطهٔ f داریم:

$$\xrightarrow{f(x)=-x+9} y=x+(-(3x))+9=9-2x$$

یعنی برد تابع $y=x+f(3x)$ به صورت بازهٔ $[5,\frac{19}{3}]$ است.

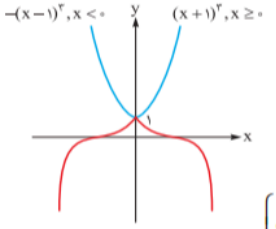
x	$\frac{4}{3}$	2
y	$9-2(\frac{4}{3})=\frac{19}{3}$	5

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴۷ **گام اول:** ضابطهٔ تابع f را می‌توان به صورت روبه‌رو نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)^3 & x\ge 0 \\ -(x-1)^3 & x<0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار آن مانند شکل زیر است:



با توجه به این‌که f روی $(2k-1,4-k^2)$ یکنوا نیست، پس $(2k-1,4-k^2)\ni 0$؛ یعنی:

$$\underbrace{4-k^2<0}_{\text{الف}}<\underbrace{2k-1}_{\text{ب}} \Rightarrow \begin{cases} \text{الف) } 4-k^2<0 \xrightarrow{\text{جذر}} 2<|k| \Rightarrow k>2 \text{ یا } k<-2 \\ \text{ب) } 2k-1>0 \Rightarrow k>\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{اشتراک}]{\cap} k>2$$

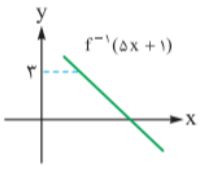
گام دوم:

$$k\in(2,+\infty)$$

توجه کنید که با حل نامعادله‌های بالا، نیازی به بررسی شرط بازه‌بودن، یعنی $4-k^2<2k-1$ نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴۸ **گام اول:** f اکیداً نزولی است؛ پس f^{-1} نیز اکیداً نزولی و هم‌چنین $f^{-1}(5x+1)$ اکیداً نزولی است، مثلاً این شکلی:



گام دوم: برای تعیین علامت عبارت زیر رادیکال، با توجه به شکل بالا، $f^{-1}(5x+1)-3$ قبل از ریشه‌اش $\oplus$ و پس از ریشه‌اش $\ominus$ است؛ پس داریم:

$$f^{-1}(5x+1)-3=0 \Rightarrow f^{-1}(5x+1)=3 \xrightarrow{\text{از دو طرف } f \text{ بگیریم}} 5x+1=f(3)=-1 \Rightarrow x=\frac{-2}{5}$$

و جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

		-3		$\frac{-2}{5}$	
$x+3$	$-$	۰	$+$		$+$
$f^{-1}(5x+1)-3$	$+$		$+$	۰	$-$
$P \geq 0$		ج	ج	ج	

گام سوم: پس دامنه فاصلهٔ $[-3,\frac{-2}{5}[$ است که شامل سه عدد صحیح -3، -2 و -1 است.

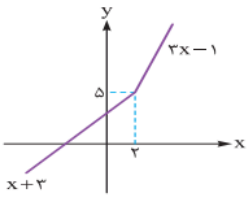
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۴۹ **گام اول:** قدرمطلق را در حالت‌های $\oplus$ و $\ominus$ برمی‌داریم:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow f(x)=2x+1+x-2=3x-1$$

$$x-2<0 \Rightarrow f(x)=2x+1-x+2=x+3$$

حالا نمودار f را ببینید:



گام دوم: تابع را وارون می‌کنیم و در مقابل هر ضابطهٔ وارون، برد تابع را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3} & , \ x \geq 5 \\ f^{-1}(x)=x-3 & , \ x<5 \end{cases}$$

پس داریم:

گام سوم: این ضابطه باید به صورت $ax+b+c|x-5|$ دربیاید:

$$x \geq 5: \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=ax+b+cx-5c \Rightarrow a+c=\frac{1}{3}, b-5c=\frac{1}{3}$$

$$x<5: x-3=ax+b-cx+5c \Rightarrow a-c=1, b+5c=-3$$

بنابراین:

$$a=\frac{2}{3}, c=\frac{-1}{3}, b=\frac{-4}{3}$$

و در نتیجه:

$$abc=\frac{8}{27}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۰ **گام اول:** نمودار ضابطهٔ بالایی تابع، یک سهمی است و ترکیب یک تابع درجه‌دوم با خودش هرگز تابعی ثابت نمی‌شود؛ پس باید تمام خروجی‌های تابع f اعداد کم‌تر یا مساوی صفر باشند که در ترکیب fof، مقادیر f را به ضابطهٔ پایینی بدهیم، یعنی باید داشته باشیم:

$$x>0, f(x)\le 0 \Rightarrow ax^2-[a]x+\frac{1}{a}\le 0$$

گام دوم: در تابع $y=ax^2-[a]x+\frac{1}{a}$، چون $[a]$ و a همیشه هم‌علامت هستند، طول رأس یا صفر است یا $x_S=\frac{+[a]}{2a}$ که در طول‌های مثبت قرار می‌گیرد.

پس برای این‌که همهٔ مقادیر تابع نامثبت شوند، لازم است $a<0$ (سهمی رو به پایین باشد) و $y_S\le 0$، یعنی داریم:

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{[a]^2-4a(\frac{1}{a})}{4a}\le 0$$

و چون a هم منفی است، باید داشته باشیم: $[a]^2-4\le 0$ (صورت کسر باید منفی باشد یا صفر.)

گام سوم: از نامعادلهٔ $[a]^2-4\le 0$ داریم:

که چون a منفی است، داریم:

$$-2\le [a]\le 2$$

بنابراین مجموعه جواب a به صورت $[-2,0)$ خواهد بود.

$$-2\le [a]<0$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۱ **گام اول:** ضابطهٔ بالایی تابع یعنی $\log_2(x^2-2x+513)$ را به صورت $\log_2((x-1)^2+512)$ ببینید که برای $x\ge 1$ اکیداً صعودی است (ترکیب $\log_2$ صعودی با سمت راست رأس سهمی) و حداقل مقدارش در شروع $f(1)=\log_2 512=9$ است.

گام دوم: پس باید ضابطهٔ پایینی تابع برای $x<1$ نیز صعودی اکید باشد و حاصل آن در ۱ از ۹ بیشتر نشود. برای این‌که $3^{(4-a)(x)}$ صعودی باشد باید $4-a>0$ باشد، یعنی $a<4$ و از نامساوی $3^{(4-a)(1)}\le 9$ داریم: $4-a\le 2$، پس $a\ge 2$ و از اشتراک این‌ها: $2\le a<4$، یعنی حداکثر مقدار $n-m$ می‌شود: $4-2=2$

گام سوم: بزرگ‌ترین عدد صحیح a می‌شود ۳؛ پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\log_2((x-1)^2+512), & x\ge 1\\ 3^x & ,x<1\end{cases}$$

و مقادیر $f^{-1}(10)$ و $f^{-1}(2)$ را می‌خواهیم:

الف) $f(x)=10 \xrightarrow[\text{چون ضابطهٔ پایین حداکثر به عرض ۹ می‌رسد.}]{\text{از ضابطهٔ بالایی استفاده می‌کنیم،}} \log_2((x-1)^2+512)=10 \xrightarrow{\text{تعریف log}} (x-1)^2+512=2^{10}$

$$\Rightarrow (x-1)^2=2^{10}-512=512=2^9 \xrightarrow[x>1]{\text{جذر}} (x-1)=\sqrt{512}$$

$$\Rightarrow x=1+\sqrt{512} \xrightarrow[22<\sqrt{512}<23]{22^2<512<23^2} [f^{-1}(10)]=[1+\sqrt{512}]=23$$

ب) $f(x)=2 \Rightarrow 3^x=2 \xrightarrow{\text{تعریف log}} x=\log_3 2=f^{-1}(2) \Rightarrow \frac{1}{f^{-1}(2)}=\log_2 3$

$$\xrightarrow{\log_2 3 \text{ بین ۱ و ۲ است.}} [\log_2 3]=[\frac{1}{f^{-1}(2)}]=1$$

پس جواب می‌شود:

$$23+1=24$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۲ راه اول: با قراردادن $x=۲$ داریم $f(۲)=\frac{۲}{۵}$؛ پس گزینه‌ای درست است که به ازای $\frac{۲}{۵}$ به ما ۲ بدهد. در ۱ و ۲ زیررادیکال منفی می‌شود:

$$۴(\frac{۲}{۵})^۲-۱<۰$$

و این دو گزینه حذف می‌شوند. در ۳ داریم:

$$\frac{۱+\sqrt{۱-۴(\frac{۲}{۵})^۲}}{۲(\frac{۲}{۵})}=\frac{۱+\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۱+\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۸}{۴}=۲$$

و در ۴، با قراردادن $\frac{۲}{۵}$ به ۲ نمی‌رسیم. پس جواب ۳ است.

راه دوم:

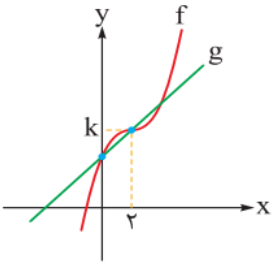
$$y=\frac{x}{x^۲+۱} \xrightarrow[\text{جای آن‌ها را عوض کنیم.}]{\text{x و y هم‌علامت‌اند.}} x=\frac{y}{y^۲+۱} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} xy^۲-y+x=۰ \xrightarrow{\text{روش دلتا}} y=\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴x^۲}}{۲x} \quad , \quad |x|\le\frac{۱}{۲}$$

چون y و x هم‌علامت هستند، علامت $\oplus$ را برمی‌داریم.

راه سوم: بعداً می‌بینیم حد f در $+\infty$ صفر است؛ پس حد راست $f^{-۱}$ در صفر باید $+\infty$ شود که فقط در ۳ این‌طور است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۳ **گام اول**: با توجه به شکل نمودار $x^۳$ را ۲ واحد به سمت راست و k واحد به بالا برده‌ایم؛ پس داریم:



$$f(x)=(x-۲)^۳+k$$

گام دوم: خط g نمودار f را در $(۲,k)$ و روی محور yها قطع کرده؛ پس داریم:

$$\left.\begin{matrix}g(۲)=k\\ g(۰)=f(۰)=k-۸\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{g(۲)-g(۰)}{۲-۰}=\frac{۸}{۲}=۴$$

بنابراین:

$$g(x)=۴x+k-۸$$

گام سوم: fog را تشکیل می‌دهیم.

$$fog(x)=f(g(x))=(g(x)-۲)^۳+k=(۴x+k-۱۰)^۳+k$$

گام چهارم: حالا چون fog اکیداً صعودی است (از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی به‌دست‌آمده)؛ پس شرط این‌که از ناحیهٔ چهارم نگذرد به صورت $fog(۰)\ge ۰$ است؛ پس داریم:

$$\xrightarrow{x=۰} (k-۱۰)^۳+k\ge ۰ \xrightarrow{\text{جست‌وجو در گزینه‌ها}} k_{min}=۸$$

دقت کنید که $f(۲)$ همان k است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۴ **گام اول:** ضابطهٔ g را به صورت روبه‌رو بازنویسی می‌کنیم:

$$y = x^{۲} + [\frac{۱}{۲} - x^{۲}] = x^{۲} + [-(x^{۲} - \frac{۱}{۲})]$$

داریم: $[-t] = \begin{cases} -[t] - ۱ & , t \notin \mathbb{Z} \\ -t & , t \in \mathbb{Z} \end{cases}$، برای حاصل $[-(x^{۲} - \frac{۱}{۲})]$ دو حالت داریم:

$$(x^{۲} - \frac{۱}{۲}) \in \mathbb{Z} : y = x^{۲} - (x^{۲} - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$(x^{۲} - \frac{۱}{۲}) \notin \mathbb{Z} : y = x^{۲} - [x^{۲} - \frac{۱}{۲}] - ۱ = \underbrace{(x^{۲} - \frac{۱}{۲}) - [x^{۲} - \frac{۱}{۲}]}_{\text{جزء اعشاری، بین ۰ و ۱}} - \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le y < \frac{۱}{۲}$$

بنابراین: $-\frac{۱}{۲} < g(x) \le \frac{۱}{۲}$؛

$$۰ < t < ۱ \ , \ y = t - \frac{۱}{۲}$$

گام دوم: ضابطه $f^{-۱}$ به صورت $f^{-۱}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a} = \frac{x - ۲}{۲x + ۱}$ است.

دقت می‌کنیم که برای ورودی‌های بیشتر از $-\frac{۱}{۲}$، تابع $f^{-۱}$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

گام سوم: با قراردادن مقادیر $۰ < g < ۱$ داریم:

$$f^{-۱}(-\frac{۱}{۲}) < f^{-۱}(g(x)) \le f^{-۱}(\frac{۱}{۲})$$

$$-\infty < f^{-۱}(g(x)) < -\frac{۳}{۴} \Rightarrow R_{f^{-۱}og} = (-\infty , -\frac{۳}{۴})$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۵ راه اول: **گام اول:** برای محاسبهٔ $f(۲)$ به جای x، عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{x=۲} f(۲) + f(\frac{۱}{۲}) = ۲ + ۱ = ۳$$

گام دوم: حالا که به $f(\frac{۱}{۲})$ احتیاج پیدا کردیم، بیایید به جای x بگذاریم $\frac{۱}{۲}$:

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} f(\frac{۱}{۲}) + f(-۱) = \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$$

گام سوم: کم‌کم داریم نگران می‌شویم! به $f(-۱)$ نیاز داریم؛ پس $x = -۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=-۱} f(-۱) + f(۲) = -۱ + ۱ = ۰$$

خب کار معلوم شد! سه‌تا معادله و سه‌تا مجهول داریم و $f(۲)$ را می‌خواهیم.

گام چهارم: معادله‌ها را کنار هم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(۲) + f(\frac{۱}{۲}) = ۳ \\ f(\frac{۱}{۲}) + f(-۱) = \frac{۳}{۲} \\ f(-۱) + f(۲) = ۰ \end{cases}$$

اگر اولی را منهای دومی کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{f(\frac{۱}{۲})\text{ها می‌روند.}} f(۲) - f(-۱) = \frac{۳}{۲}$$

حالا این را در کنار سومی ببینید:

$$\begin{cases} f(۲) - f(-۱) = \frac{۳}{۲} \\ f(۲) + f(-۱) = ۰ \end{cases}$$

از جمع این‌ها داریم:

$$\xrightarrow{f(-۱)\text{ها می‌روند.}} ۲f(۲) = \frac{۳}{۲}$$

پس:

$$\xrightarrow{\div ۲} f(۲) = \frac{۳}{۴}$$

راه دوم: اگر دلتان ضابطهٔ $f(x)$ را خواست باید به جای x، وارونِ $\frac{x - ۱}{x}$ یعنی $\frac{-۱}{x - ۱}$ را قرار دهید. (اگر گفتید چرا؟)

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۶ **گام اول:** $g^{-1}of^{-1}$ همان وارون تابع fog است؛ پس در معادلهٔ صورت سؤال fog با وارونش برابر شده است، چون f و g اکیداً صعودی‌اند، fog نیز اکیدا صعودی است و فقط وقتی با وارونش مساوی می‌شود که برابرِ x باشد:

$$fog = g^{-1}of^{-1} = (fog)^{-1} \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} fog = x$$

گام دوم: fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = ۴ - ۳\sqrt[۳]{۲ - \sqrt[۳]{g(x)}} = ۴ - ۳\sqrt[۳]{۲ - \sqrt[۳]{x^۳}} = ۴ - ۳\sqrt[۳]{۲ - x}$$

حالا از معادلهٔ $fog = x$ داریم:

$$۴ - ۳\sqrt[۳]{۲ - x} = x$$

گام سوم:

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم.}} ۴ - x = ۳\sqrt[۳]{۲ - x} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (۴ - x)^۳ = ۲۷(۲ - x)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد را باز و مرتب کنیم.}} ۶۴ - ۴۸x + ۱۲x^۲ - x^۳ = ۵۴ - ۲۷x \Rightarrow x^۳ - ۱۲x^۲ + ۲۱x - ۱۰ = ۰$$

با کمی دقت، مجموع ضرایب صفر است؛ پس $x = ۱$ صدق می‌کند و با تقسیم بر $x - ۱$ داریم:

$$\xrightarrow{\text{x=۱ می‌خورد.}} (x - ۱)(\underbrace{x^۲ - ۱۱x + ۱۰}_{x_۱=۱,\ x_۲=\frac{c}{a}}) = ۰ \xrightarrow[\text{صفر است.}]{\text{دوباره جمع ضرایب}} x_۱ = ۱, x_۲ = ۱, x_۳ = ۱۰$$

گام چهارم: پس جمع جواب‌های متمایز می‌شود:

$$۱ + ۱۰ = ۱۱$$

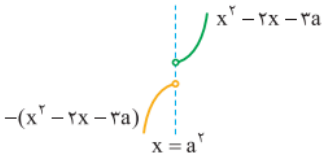
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۷ **گام اول:** به عامل $\frac{|x - a^۲|}{x - a^۲}$ دقت کنید. حاصل آن همواره $+۱$ یا -۱ است.

در واقع ضابطهٔ تابع f برای $x > a^۲$ و $x < a^۲$ دو حالت دارد:

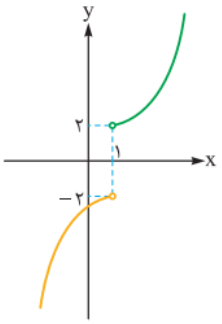
$$f(x) = \begin{cases} +(x^۲ - ۲x - ۳a) , & x > a^۲ \\ -(x^۲ - ۲x - ۳a) , & x < a^۲ \end{cases}$$

گام دوم: با دقت به نمودار $y = x^۲ - ۲x - ۳a$، فقط در حالتی f یک‌به‌یک می‌شود که $x = a^۲$ طول رأس سهمی باشد، ببینید:



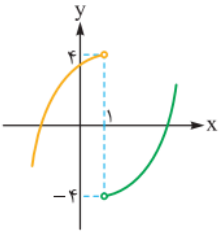
گام سوم: رأس سهمی در $x = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۲)}{۲(۱)} = ۱$ است؛ پس $a^۲ = ۱$ و دو حالت داریم: $a = ۱$ یا -۱

گام چهارم: به ازای $a = -۱$ و $a = ۱$ نمودار f را رسم می‌کنیم:



این خوب است.

$$\xrightarrow{a=-۱} f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x + ۳ & , x > ۱ \\ -(x^۲ - ۲x + ۳) & , x < ۱ \end{cases}$$



این‌که یک‌به‌یک نشد.

$$\xrightarrow{a=۱} f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x - ۳ & , x > ۱ \\ -(x^۲ - ۲x - ۳) & , x < ۱ \end{cases}$$

گام پنجم: پس فقط $a = -۱$ قبول است و داریم:

$$f(۲a) = f(-۲) = -((-۲)^۲ - ۲(-۲) + ۳) = -۱۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۸ **گام اول:** بیایید با هم چندتای اول را حساب کنیم تا ببینیم ریتم تکراری پیدا می‌شود یا نه.

$$f(-1)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-(-1)^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f(f(-1))=f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})=\frac{1}{\sqrt[3]{1-(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{2}$$

$$f(f(f(-1)))=f(\sqrt[3]{2})=\frac{1}{\sqrt[3]{1-(\sqrt[3]{2})^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1-2}}=\frac{1}{-1}=-1$$

برگشتیم سر جای اول، یعنی دوباره به -1 رسیدیم!

گام دوم: حالا که فهمیدیم $f(f(f(-1)))$ می‌شود: (-1)، پس می‌گوییم هر سه بار ترکیب f با خودش به ازای (-1) باز هم (-1) است؛ پس ۲۰۲۲ بار ترکیب f با خودش در (-1) می‌شود: (-1). (چون ۲۰۲۲ مضرب ۳ است.)

گام سوم: پس در ترکیب برای ۲۰۲۳امین بار داریم:

$$f(f\dots(f(-1))\dots)=f(-1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\xrightarrow[\text{مخرج را گویا کنیم.}]{\times\sqrt[3]{4}\ \times\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۹ **گام اول:** با انتقال یک واحد به راست و بالا داریم:

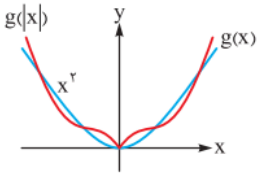
$$g(x)=(x-1)^3+1$$

$$\Rightarrow g(|x|)=(|x|-1)^3+1$$

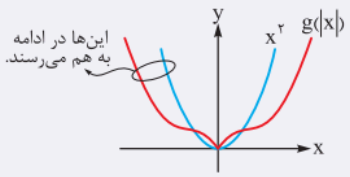
پس ضابطهٔ $g(|x|)$ به صورت روبه‌رو است:

گام دوم: راه اول: معادلهٔ $g(|x|)=x^2$ به صورت تلاقی $(|x|-1)^3+1, x^2$ درمی‌آید.

که با توجه به شکل روبه‌رو پنج جواب دارد:



تذکر دقت کنید که برای xهای بزرگ و خیلی کوچک (مثلاً ± 100) باید نمودار g بالاتر از x^2 باشد؛ پس شکل را این‌طوری ول نکنید:



راه دوم:

$$x\geq 0\Rightarrow (x-1)^3+1=x^2\Rightarrow (x-1)^3=x^2-1\Rightarrow (x-1)(x-1)^2=(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ x^2-2x+1=x+1\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=3\end{cases}\end{cases}$$

$$x<0\Rightarrow (-x-1)^3+1=x^2\Rightarrow -(x+1)^3=x^2-1\Rightarrow -(x+1)(x+1)^2=(x+1)(x-1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\ -x^2-2x-1=x-1\Rightarrow x^2+3x=0\Rightarrow x(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\ \times\\ x=-3\end{cases}\end{cases}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶۰ **گام اول:** ضابطهٔ f را ساده‌تر کرده و بُرد آن را می‌یابیم. از آن‌جایی که $0 \le x-[x] < 1$ داریم:

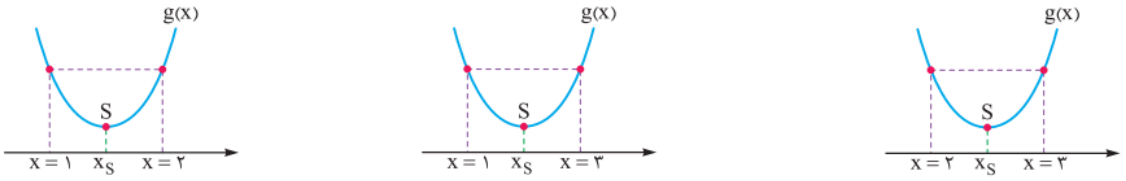
$$f(x)=[3x+1]-3[x]=[3x-3[x]+1]=[3\underbrace{(x-[x])}_{0\le\ <1}+1]=[\underbrace{1\le\ <4}_{0\le\ <3}]=1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3$$

بنابراین برد f مجموعهٔ $\{1,2,3\}$ است.

گام دوم: gof یعنی $g(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=g(1) \text{ یا } g(2) \text{ یا } g(3)$$

گام سوم: برای این‌که حاصل $g(1)$، $g(2)$ و $g(3)$ دو مقدار باشد، باید دوتا از این نقاط هم‌عرض باشند. سه حالت داریم:



حالت اول حالت دوم حالت سوم

طول رأس سهمی $g(x)=x^2-2bx+c$ برابر با $x_S=b$ می‌باشد؛ پس:

گام چهارم: مجموع حداقل و حداکثر b برابر است با:

حالت اول: $x_S=b=\frac{1+2}{2}=1/5$

حالت دوم: $x_S=b=\frac{1+3}{2}=2 \quad \Rightarrow b_{min}+b_{max}=1/5+2/5=4$

حالت سوم: $x_S=b=\frac{2+3}{2}=2/5$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶۱ راه اول: **گام اول:** ضابطهٔ تابع وارون $y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}$ به صورت $x=\sqrt{y+\sqrt{2y-1}}$ می‌باشد که نمودار آن قرینهٔ نمودار y نسبت به خط $y=x$ است.

گام دوم: حالا نمودار $x=\sqrt{y+\sqrt{2y-1}}$ را:

۱) دو واحد در جهت مثبت محور xها جابه‌جا می‌کنیم؛ پس باید تبدیل $x \to x-2$ انجام شود.

۲) سه واحد در جهت منفی محور yها جابه‌جا می‌کنیم؛ پس باید تبدیل $y \to y+3$ انجام شود.

$$x=\sqrt{y+\sqrt{2y-1}} \xrightarrow[y\to y+3]{x\to x-2} x-2=\sqrt{(y+3)+\sqrt{2(y+3)-1}} \Rightarrow x-2=\sqrt{y+3+\sqrt{2y+5}}$$

گام سوم: حالا مقدار y را به ازای $x=2+3\sqrt{2}$ می‌یابیم:

$$(2+3\sqrt{2})-2=\sqrt{y+3+\sqrt{2y+5}} \Rightarrow 3\sqrt{2}=\sqrt{y+3+\sqrt{2y+5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 18=y+3+\sqrt{2y+5}$$

$$\Rightarrow 15-y=\sqrt{2y+5} \xrightarrow[15-y\ge 0]{\text{توان ۲}} 225-30y+y^2=2y+5 \xrightarrow{\text{مرتب}} y^2-32y+220=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} (y-10)(y-22)=0$$

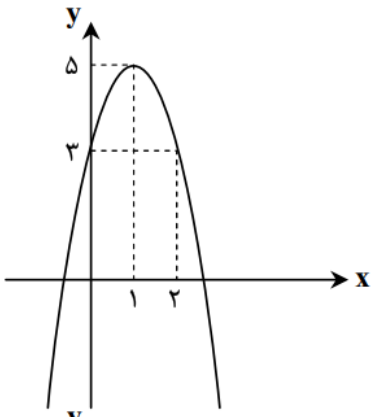
$$\Rightarrow \begin{cases} y=10 \\ y=22 \end{cases} \xrightarrow{15-y\ge 0} \boxed{y=10}$$

راه دوم: در معادلهٔ $y=15-\sqrt{2y+5}$ گزینه‌ها را کنترل کنیم.

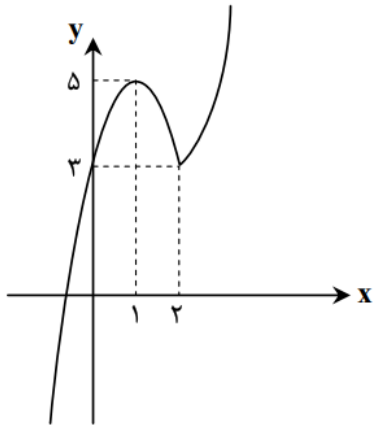
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶۲ ابتدا تابع f را به یک تابع دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x|۲x-۴|+۳ \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x(۲x-۴)+۳ & x<۲\\ x(۲x-۴)+۳ & x\geq ۲\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۲x^{۲}+۴x+۳ & x<۲\\ ۲x^{۲}-۴x+۳ & x\geq ۲\end{cases}$$



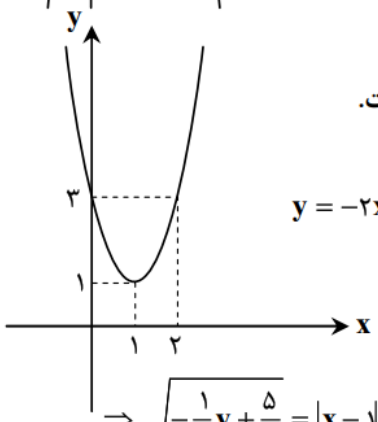
نمودار f



با توجه به شکل، تابع f روی دامنهٔ $[۱,۲]$ و برد $[۳,۵]$ با ضابطهٔ $y=-۲x^{۲}+۴x+۳$ نزولی اکید است.

اکنون ضابطهٔ وارون آن را به‌دست می‌آوریم:

$$y=-۲x^{۲}+۴x+۳ \Rightarrow y-۳=-۲x^{۲}+۴x \Rightarrow -\frac{۱}{۲}y+\frac{۳}{۲}=x^{۲}-۲x \xrightarrow{+۱} -\frac{۱}{۲}y+\frac{۵}{۲}=(x-۱)^{۲}$$



$$\Rightarrow \sqrt{-\frac{۱}{۲}y+\frac{۵}{۲}}=|x-۱| \xrightarrow{x\in[۱,۲]} \sqrt{\frac{-y+۵}{۲}}=x-۱ \Rightarrow x=۱+\sqrt{\frac{۵-y}{۲}} \Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{\frac{۵-x}{۲}}\ ,\ ۳\leq x\leq ۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

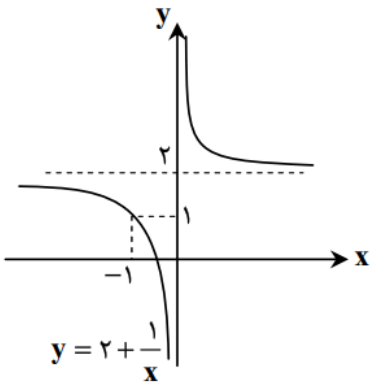
۲۶۳ ابتدا دامنهٔ تابع fog را پیدا می‌کنیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\neq -1 \mid \frac{11x+3}{x+1}\neq 3\right\}=\{x\neq -1 \mid x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$$

اکنون به محاسبهٔ ضابطهٔ تابع fog می‌پردازیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{11x+3}{x+1}\right)=\frac{\frac{11x+3}{x+1}+5}{\frac{11x+3}{x+1}-3}=\frac{\frac{11x+3+5x+5}{x+1}}{\frac{11x+3-3x-3}{x+1}}=\frac{16x+8}{8x}=2+\frac{1}{x}$$

با توجه به نمودار تابع $y=2+\frac{1}{x}$، عدد ۲ در برد تابع fog وجود ندارد. همچنین عدد -1 در دامنهٔ تابع fog وجود ندارد، پس عدد $2+\frac{1}{-1}=1$ در برد تابع fog وجود ندارد. بنابراین برد تابع fog برابر $\mathbb{R}-\{1,2\}$ است.



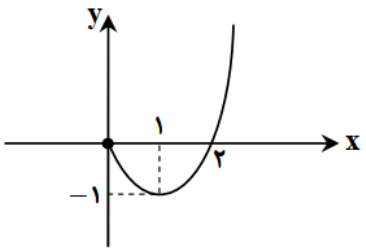
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۶۴ نکته: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ هر تابع را «دامنه» و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

برای یافتن برد تابع، نمودار آن را رسم می‌کنیم. ابتدا نمودار $y=x^2-2x$ را برای $x\geq 0$ رسم می‌کنیم:

برای آنکه برد $\mathbb{R}$ شود، کافی است خط $y=ax+2-a$ با شیب مثبت و عرض از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی -1 باشد:

$$y=ax+2-a \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ 2-a\geq -1 \Rightarrow a\leq 3 \end{cases} \Rightarrow a\in(0,3]$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۶۵ f با دامنهٔ $D_f=[1,9]$ تابعی صعودی اکید است به طوری که:

$$x+1\in D_f \Rightarrow 1\leq x+1\leq 9 \Rightarrow 0\leq x\leq 8$$

$$4-2x\in D_f \Rightarrow 1\leq 4-2x\leq 9 \Rightarrow \frac{-5}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}$$

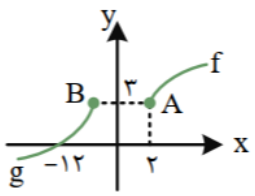
$$4-2x\leq x+1 \Rightarrow x\geq 1$$

از طرفی، چون f صعودی اکید است، پس:

پس در کل $1\leq x\leq \frac{3}{2}$ جواب نهایی است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۶۶ با توجه به نمودار $y=f(x)$ نقطه ابتدایی نمودار f نقطه $A\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}$ است، پس فرض می‌کنیم $B\begin{vmatrix}\alpha\\۳\end{vmatrix}$ یعنی $a=۳$، از طرفی:



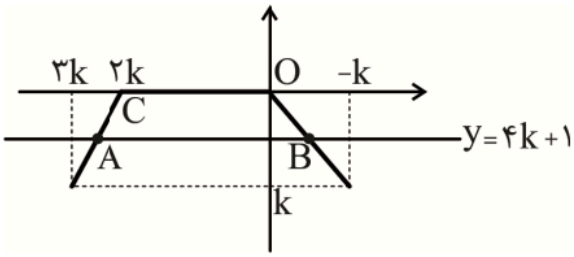
$$g(-۱۲)=۰\Rightarrow ۳-\sqrt{b+۱۲}=۰\Rightarrow \sqrt{b+۱۲}=۳\Rightarrow b=-۳$$
$$\Rightarrow a+b=۰$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۶۷ **گزینه ۳ درست است.**

با فرض $k<۰$ نمودار نسبت به محور عرض و طول‌ها قرینه می‌شود.

همین‌طور نمودار $f(x)$ در راستای افقی و عمودی دچار انبساط k برابری می‌شود.



فرض کنیم نمودار خط افقی $y=۴k+۱$ این نمودار را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند.

دقت کنید که شیب دو پاره‌خط مورب برابر ۱ و -۱ است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$x_A+x_B=-۳\rightarrow x_c=-۳\rightarrow ۲k=-۳\rightarrow k=-\frac{۳}{۲}$$

اکنون مقدار $f(|k|+۱)=f(\frac{۵}{۲})$ را می‌یابیم.

با توجه به‌شکل تابع $f(x)$، ضابطهٔ خط مورب در قسمت مثبت محور xها را می‌یابیم:

$$f(x)=x-۲\rightarrow f(\frac{۵}{۲})=\frac{۵}{۲}-۲=\frac{۱}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶۸ شرط برابر بودن $(fof^{-۱})(x)=(f^{-۱}of)(x)$، برابر بودن برد و دامنه تابع است. پس داریم:

$$D_f=(۱,+\infty)$$
$$f(x)=\frac{(x-۱)(\sqrt{x+۲})}{x-۱}+m=\sqrt{x+۲}+m\xrightarrow{x>۱}R=(\sqrt{۳}+m,+\infty)$$

بنابراین $\sqrt{۳}+m=۱$ و $m=۱-\sqrt{۳}$.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $x^۲-۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱\pm\sqrt{۳}$

۲) $x^۲+۲x-۴=۰\Rightarrow x=-۱\pm\sqrt{۵}$

۳) $x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱,-۲$

۴) $x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=-۱,۲$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)